



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

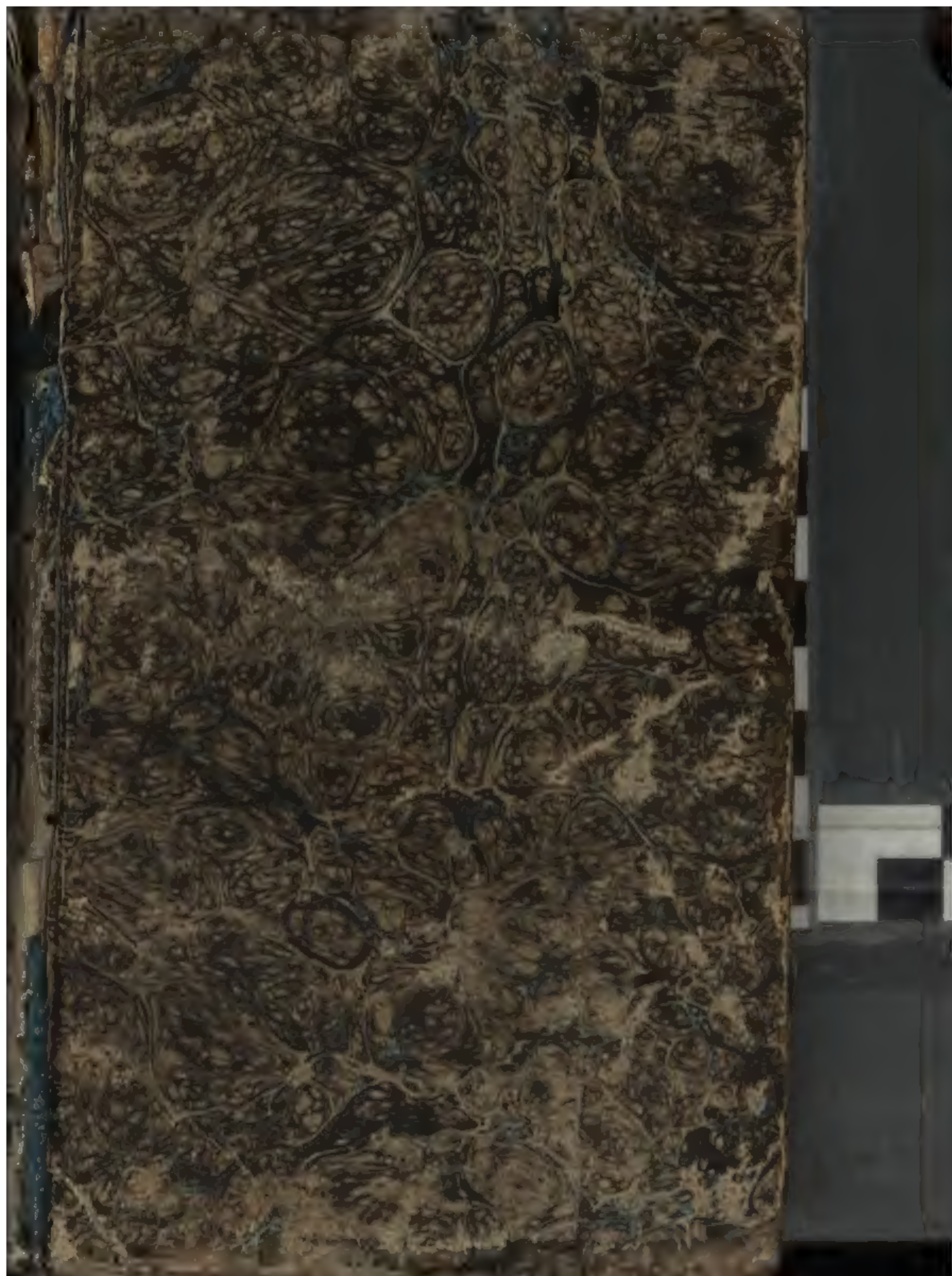
Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

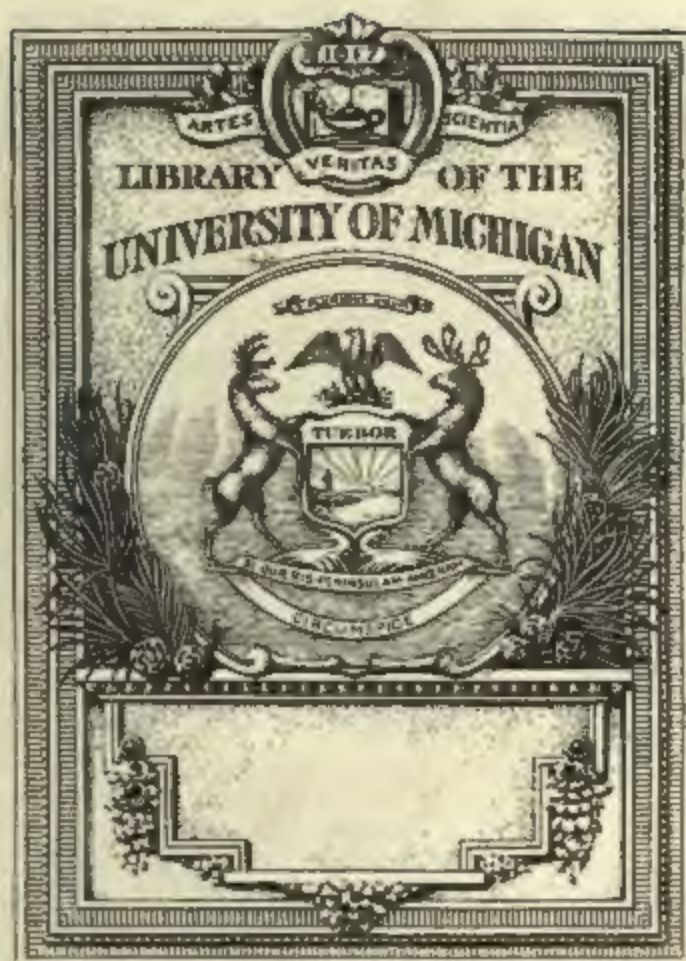
## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

















**A n l e i t u n g**  
zur  
geographischen  
**Ortsbestimmung**

vorzüglich  
vermittelt des Spiegelsextanten

von  
**M. J. G. F. Bohnenberger.**

---

Mit sieben Kupfertafeln.

---

Göttingen,  
bey Vandenhök und Ruprecht

1795.





1-27-30. H.R.J.

1. Buch.  
2. Buch.  
3. Buch.  
4. Buch.

## V o r r e d e.

*O*b man gleich in verschiedenen Schriften, besonders in denjenigen, welche von der Gestalt der Erde handeln, ausführliche Anleitungen zur geographischen Ortsbestimmung findet, so schien mir doch ein Buch, in welchem Anleitung dazu gegeben würde, wie man mit kleinen und weniger kostbaren Werkzeugen die geographische Lage eines Orts mit hinlänglicher Genauigkeit bestimmen könne, nicht überflüssig zu seyn, zumal da jezo kleinere astronomische Werkzeuge und besonders die Spiegelsextanten in einer so grossen Vollkommenheit verfertigt werden. Ich habe mich daher entschlossen, nicht allein einen Spiegelsextanten nach seiner neuern Einrichtung umständlich zu beschreiben, sondern

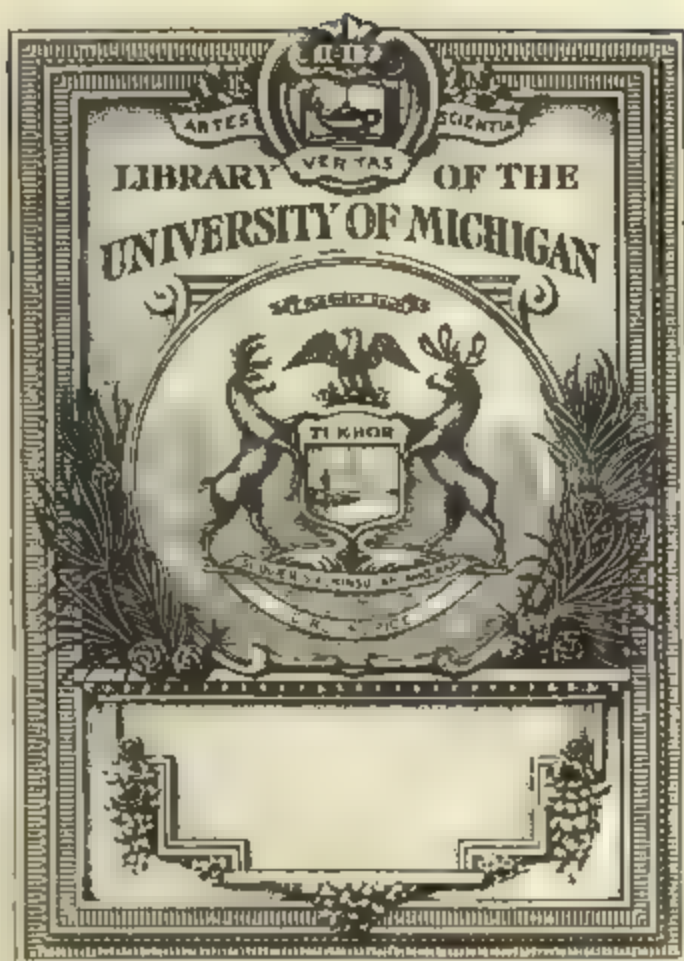
dern auch Anleitung zu seinem Gebra  
 zu geben. Um aber meine Schrift auch  
 solche brauchbar zu machen, welche  
 Quadranten versehen sind oder sich er  
 anschaffen wollen, gebe ich hier die Besch  
 bung eines hölzernen Quadranten, den  
 leicht ein jeder Liebhaber auch durch  
 che Arbeiter wird verfertigen lassen könn  
 die sich nicht in Verfertigung mathem  
 scher Werkzeuge geübt haben. Die  
 diesen Quadranten zu berichtigen, i  
 sich leicht auf Quadranten von einer  
 dern Einrichtung anwenden lassen.  
 von der Berichtigung der astronomisc  
 Werkzeuge die Genauigkeit der Beob  
 tungen selbst abhängt, so habe ich da  
 umständlich gehandelt und mehrere  
 thoden angegeben, um sich auf verschi  
 ne Art von der Richtigkeit des Verfah  
 versichern zu können. Man wird find  
 dafs der Spiegelsextant sich vorzüglich le  
 berichtigen läfst, welches viel zu der  
 nauigkeit dieses Instruments beyträgt. V  
 den Einfluß der Fehler astronomisc  
 Werkzeuge auf die Messungen betrifft,

sch



schien es mir desto nöthiger zu seyn, Mittel anzugeben, wie man diejenige Stücke durch Beobachtungen bestimmen könne, die bey der Berechnung der jedesmal erforderlichen Verbesserung der Messung gegeben seyn müssen, je weniger hierauf gewöhnlich Rücksicht genommen wird. Dergleichen Untersuchungen haben keinen Nutzen, wenn nicht zugleich gezeigt wird, wie man die Fehler selbst bestimmen könne.

Um bey kleinen Werkzeugen das zu ersetzen, was an der Genauigkeit der damit angestellten Beobachtungen abgehen möchte, werden theils besondere Methoden theils Vervielfältigungen der Beobachtungen erfordert, wozu ich eine deutliche Anleitung zu geben gesucht habe. Verschiedene Näherungsformeln, die man hier, sowohl zur Abkürzung der Rechnung, als auch in manchen Fällen mit mehrerer Sicherheit, als vollkommen genaue Formeln, gebraucht, habe ich so weit entwickelt, dass die Grenzen angegeben werden konnten, innerhalb welcher sie sich von den genauen Formeln







men, übergangen, wo mehr auf Abkürzu-  
 und Erleichterung der Rechnung als  
 die Genauigkeit Rücksicht genommen  
 Ein Beobachter zu Land kann seine  
 stände genauer nehmen, als ein Beoba-  
 ter auf der See, und solche Beobachtung  
 verdienen auch eine genauere Berechnung.

Ich hatte mir vorgenommen, auch  
 Gebrauch des Sextanten bey trigonome-  
 schen Ausmessungen zur geographisch  
 Ortsbestimmung zu zeigen, wo man  
 ebenfalls vortheilhaft anwenden und die  
 Verbindung astronomischer Beobachtung  
 mit trigonometrischen Messungen in kur-  
 Zeit viele Orte ihrer geographischen La-  
 nach genau bestimmen könnte. Weil a-  
 dadurch der Band zu sehr wäre verstä-  
 worden, so werde ich vielleicht in ei-  
 Fortsetzung der gegenwärtigen Schrift  
 von handeln.

Göttingen  
 im März 1795.

M. Bohnenberger.

# Inhalt.

*Allgemeine Darstellung der Methode, die geographische Lage eines Orts durch astronomische Beobachtungen zu bestimmen.* §. 1 bis 10.

*Beschreibung der zur geographischen Ortsbestimmung erforderlichen Instrumente.*

Allgemeine Begriffe von Instrumenten zu Höhenmessungen. §. 11. 12.

Fernröhre statt des Diopterlineals. §. 13.

Anzeige einiger Schriften über Quadranten. §. 14.

*Beschreibung eines hölzernen Quadranten.* §. 15.

Vorrichtung zur Aufstellung desselben. §. 16.

Vorzug derselben vor der gewöhnlichen. §. 17.

*Ausführliche Beschreibung der einzelnen Theile des Quadranten.*

Körper des Quadranten und Prüfung seiner Ebene. §. 18.

Vorrichtung am Mittelpunkt. §. 19.

Beschreibung der Fernröhre. §. 20.

Wie des Quadranten Axe und seine Ebene vertical gestellt wird. §. 21.

*Eintheilung des Quadranten.*

Den Mittelpunkt des Quadranten zu finden. §. 22.

Eintheilung in 96 gleiche Theile. §. 23.

Eintheilung in die gewöhnlichen Grade durch fortgesetzte Halbierungen mit und ohne Masstab. §. 24.

Ziehung der Theilstriche. §. 25.

Eintheilung des Vernier für die 96 Theilung. §.  
für die 90 Theilung. §.

Bestimmung der Punkte für den Bleyfaden. §. 21

*Berichtigung des Quadranten.* §. 29.

Prüfung seiner Ebene. §. 30.

Ueber die Excentricität des Quadranten. §. 31.

Methoden sie zu bestimmen. §. 32.

Prüfung des Bogens von 90°. §. 33.

Untersuchung der übrigen Abtheilungen. §. 34.

Berichtigung der Absehenslinie. §. 35. 36.

Berichtigung der Umdrehungsaxe mit einer Libelle.  
mit dem Bleyfaden.

Bestimmung des Collimationsfehlers. §. 39.

durch Umkehrung. §. 40. 41.

durch Umwendung. §. 42.

*Hadley's Spiegeloctant.*

Kurze Geschichte seiner Erfindung und Vervollkomn  
§. 44. 46.

Einige catoptrische Sätze, welche bey der Theori  
Sextanten gebraucht werden. §. 47. 48. 49.

*Theorie des Sextanten.* §. 50. 51.

Fernröhre zur schärferen Beobachtung. §. 52.

Untersuchungen über die Bilder, welche gläserne  
machen, deren beyde Flächen genau eben und  
der parallel sind. §. 53.

Man sieht wenigstens zwey Bilder. §. 54. 55.

Ueber ihren scheinbaren Abstand voneinander.

Bey diesem findet ein Größtes statt. §. 57.

Wie weit ein Gegenstand entfernt seyn müsse, daß  
Bilder um weniger als eine Secunde voneinan  
stehen. §. 58.

*Beschreibung eines Spiegelsextanten.*

Die Vorrichtung am Mittelpunct und der große  
§. 60.

Der kleine Spiegel. §. 61.

Der Gradbogen. §. 62.

Vorrichtung zur Stellung der Fernröhre. §. 63.

Abmessungen des Sextanten. §. 64.

*Berichtigung des Spiegelsextanten.*

Untersuchung, ob der große Spiegel auf der Eb  
Sextanten senkrecht stehe. §. 65.

Den kleinen Spiegel zu berichtigen. §. 66.

Die Fernröhre zu berichtigen. §. 67.

Den Fehler des Index zu bestimmen. §. 68.

Untersuchung der gefärbten Gläser. §. 69. 70.

*Beschreibung des künstlichen Horizonts.*

Theorie desselben. §. 71.

Beschreibung eines künstlichen Horizonts mit Quecksilber.  
§. 72. 73.

Unbequemlichkeit desselben. §. 74.

Beschreibung eines andern künstlichen Horizonts nach H.  
von Zach. §. 75.

Wasserwage zur Stellung des Horizonts. §. 76.

Noch ein künstlicher Horizont. §. 77.

*Höhenmessungen mit dem Spiegelsextanten.*  
§. 78. 79.

Stativ für den Sextanten. §. 80.

*Verbesserung der beobachteten Höhen.*

Astronomische Strahlenbrechung und Formeln zu ihrer Be-  
rechnung nach *Simpson*, *Bradley* und *Mayer*. §. 81.

Höhenparallaxe und Formeln zur Berechnung derselben.  
§. 82.

*Untersuchungen über die Fehler eines Spie-  
gelsextanten.*

Fehler, wenn die Axe der Fernröhre mit des Sextanten  
Ebene nicht parallel ist. §. 83. 84. 85.

Methode, diesen Fehler zu bestimmen, und den Abstand  
der Fäden in der Fernröhre zu finden. §. 86.

Die Neigung der Fernröhre gegen des Sextanten Ebene  
durch Messung großer Winkel zu bestimmen. §. 87.

Fehler, wenn der große Spiegel nicht senkrecht steht auf  
des Sextanten Ebene. §. 88.

Fehler, wenn der kleine Spiegel nicht senkrecht steht.  
§. 89.

Fehler, welche entstehen, wenn die beyden Flächen der  
gläsernen Spiegel einander nicht parallel sind. §. 90  
bis 93.

Feinheit der Theilstriche. §. 94.

Fehler, wenn der künstliche Horizont nicht genau ni-  
vellirt ist. §. 95.

Fehler, den man begehen kann, wenn man die beyden  
Bilder zur Berührung bringt. §. 96.

Ueber die Zuverlässigkeit der mit Spiegelsextanten an-  
gestellten Beobachtungen. §. 97.

Ueber



Ueber einige andere cotoptrische Winkelmesser und Rassen's Verbesserungen des Spiegelsextanten. §. 98.

*Astronomische Uhren.* §. 99.

Das einfache Secundenpendel, und Bestimmung des Mittelpuncts des Schwungs bey zusammengesetzten. §. 100.

Änderung des Gangs einer Uhr, wenn das Pendel Schwünge von verschiedener GröÙe macht. Anwendung auf eine Pendeluhr in Greenwich. §. 101.

Aufhängung des Pendels zwischen cycloidischen Blechen. §. 102.

Gestalt des Pendels und Aufhängung desselben an Federn. §. 103.

Wirkung der verschiedenen Temperatur der Luft auf die Pendeluhr. Verschiedene Compensationspendel. §. 104.

Beschreibung eines auf der Herzoglichen Sternwarte in Gotha befindlichen Compensationspendels aus Zink und Eisen. §. 105.

Störungen, welche durch die Uhrgewichte in dem Gang der Uhren hervorgebracht werden, wenn sie der Pendellinse nahe kommen. §. 106.

Etwas über tragbare Uhren und Chronometer. §. 107. 108.

*Berichtigung der Uhr.* §. 109.

Bestimmung der Culmination eines Sterns. Correspondirende Höhen. §. 110.

Verbesserung correspondirender Höhen, wenn der Stern in der Zwischenzeit der Beobachtungen seine Abweichung ändert. §. 111.

Anwendung auf ein Beyspiel. §. 112.

Abkürzung der Rechnung und dazu dienende Tafeln. 113.

Bestimmung der Zeit, da man die correspondirenden nehmen muß, um den Mittag am sichersten zu stimmen. §. 114.

Die Zeit der schnellsten Höhenänderung solcher, deren nordliche Abweichung kleiner ist als die Höhe, ist nie über sechs Stunden vom Mittag entfernt. §. 115.

Zeit der geschwindesten Höhenänderung für Stern zwischen dem Zenith und dem Pol culminiren.

Vortheile correspondirender Höhen nahe am Zenith. 118.

Die Zeit der Culmination eines Fixsterns nahe am Zenith durch eine Fernröhre zu bestimmen. §. 119.

Berichtigung dieser Fernröhre. §. 120. 121.

Andere Berichtigungsmethoden und Anwendung auf ein Beispiel. §. 122.

Correspondirende Höhen der Sonne zur Bestimmung der Mitternacht und Verbesserung derselben. §. 123.

Bestimmung des Gangs einer Uhr und der wahren Zeit einer Beobachtung. §. 124.

Eine Uhr, die nach Sternzeit geht, zu berichtigen. §. 125.

Bestimmung der Zeit, welche eine Uhr in dem Augenblick der Culmination eines Sterns zeigen muß. §. 126.

Gebrauch des östlichen Abstands  $0^\circ \gamma$  von der Sonne. §. 127.

Verbesserung der Zeit, da ein Stern durch den Mittagskreis geht, wegen der Aberration und Nutation. §. 128.

Erläuterung der §. 128 gegebenen Formeln durch ein Beispiel. §. 129.

*Beschreibung eines Filar-Gnomons.* §. 130.

Berichtigung desselben. §. 131.

*Bestimmung der Polhöhe oder der geographischen Breite eines Orts.*

Höhenänderung nahe an dem Mittagskreis. §. 133.

Für einen Stern, der in dem nördlichen Theil des Meridians culminirt. §. 134.

Ueber den scheinbaren Weg eines Sterns in dem Sehfeld einer Fernröhre, deren Axe in der Mittagsfläche liegt. §. 135. 136.

Verbesserung der Höhen, die man mit einem in der Mittagsfläche stehenden Quadranten kurze Zeit vor oder nach der Culmination eines Sterns genommen hat. §. 138.

*Bestimmung der Breite vermittelt der Circumpolar-Sterne.* §. 139.

Durch Beobachtung der Circumpolarsterne die Lage des Quadranten und die wahre Zeit ihrer Durchgänge durch den Mittagskreis zu bestimmen. §. 140. 141.

Verbesserung der aus Beobachtungen der Circumpolarsterne hergeleiteten Breite wegen der Präcession, Aberration, Nutation und der eigenen Bewegung der Fixsterne. §. 142.

Formeln zur Berechnung der Aberration und Nutation in der Abweichung. §. 143.

*Be-*

## *Bestimmung der Breite aus der größten und kleinsten Mittagshöhe der Sonne*

§. 144. 145.

Zusammengehörige Veränderungen der geraden Abweichung und Abweichung der Sonne nahe bey den Sonnenwenden. §. 146.

Aus Mittagshöhen der Sonne nahe bey den Sonnenwenden die größte oder kleinste Sonnenhöhe zu finden. §. 147.

Erläuterung dieser Methode durch ein Beyspiel. §. 148.  
Verbesserung der aus Solstitialhöhen hergeleiteten Breiten wegen der Veränderungen der Schiefe der Ekliptik. §. 149.

## *Methoden, die Breite zu bestimmen, welche die Abweichungen der Sterne als bekannt voraussetzen.*

Bestimmung der Breite vermittelst kleiner Abstände vom Zenith und Berichtigung des Quadranten durch Reduction. §. 151.

Mit Zenithsectoren kann man die Breite nicht genau bestimmen als mit Quadranten. §. 152.

## *Bestimmung der Breite durch Höhenunterschiede von Sternen, die gegen Nord und Süden culminiren.* §. 153.

Horrebow's und Hell's Methode. §. 154.

Ersparung der Micrometers. §. 154.

Bestimmung der Breite vermittelst des Spiegelsextanten. §. 155.

Reduction der nahe am Mittag genommenen Höhen auf den Mittag. §. 156.

Verbesserung wegen der Veränderung der Abweichung der Sonne. §. 157.

Aus Höhen nahe am Mittag auch alsdann die Zeit des wahren Mittags zu bestimmen, wenn man keine correspondirende Höhen genommen hat. §. 158.

Formel für die Verbesserung des Mittags aus Höhen am Meridian. §. 159.

Die größte Höhe der Sonne trifft vor oder nach dem Durchgang durch den Mittagkreis ein. Beym Durchgang kann dieses zuweilen  $4\frac{1}{2}$  Minuten vor oder nach

nem Durchgang durch den Mittagskreis geschehen.  
§. 159.

Aus zweyen Höhen, wovon die eine nahe am Meridian, die andere weit von demselben genommen ist und aus der Zwischenzeit der Beobachtungen die Breite zu finden. *Douwesische Methode.* §. 160.

Hülftafeln zur Erleichterung der Rechnung. §. 161.

*Aus gleichen aber unbekannten Höhen zweyer Sterne und den wahren Zeiten der Beobachtungen die Breite zu bestimmen.* §. 162.

Den Fehler des zu den Höhenmessungen gebrauchten Werkzeugs zu bestimmen. §. 163.

Aus drey Höhen eines Sterns und aus den Zwischenzeiten der Beobachtungen die Breite zu finden. §. 164.

Aus dem Stundenwinkel, der Abweichung und Höhe eines Sterns die Breite zu finden. §. 165.

Untersuchungen über den Einfluss, welchen Fehler in der Höhenmessung und Zeitbestimmung auf die Breite haben. §. 166.

Aus drey nahe am Mittag genommenen Höhen die Breite zu finden. §. 167.

Genauigkeit der Beobachtungen mit Spiegelsextanten. §. 168.

*Methoden, die wahre Zeit einer Beobachtung zu bestimmen, welche die Breite als genau oder beynahe bekannt voraussetzen.*

Aus der Breite, Höhe und Abweichung eines Sterns die wahre Zeit zu finden. §. 169.

Auflösung mittelst der *Douwesischen* Tafeln. §. 170.

Eine ähnliche Auflösung mittelst der gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln. §. 170.

Vorschlag des H. von Zach, die wahre Zeit durch Höhenmessungen zu bestimmen. §. 171:

Methode des H. Ob. von Tempelhof. §. 172.

*Bestimmung der geographischen Länge eines Orts.* §. 173.

Bestimmung der Länge durch Mondsfinsternisse. §. 174.

Durch Verfinsterungen der Jupiterstrabanten. §. 175.

Be-

*Bestimmung der Länge durch Beobachtung der Sonnenfinsternisse.* §. 1

Beobachtung der Sonnenfinsternisse, gefärbte Gläser.  
§. 177.

Reduction dieser Beobachtungen auf den Mittelort der Erde. §. 178. 179.

Gestalt der Erde, Berechnung der verbesserten geocentrischen Breite und des Halbmessers für einen gegebenen Ort. §. 180. 181. 182.

Unterschied zwischen der beobachteten und geocentrischen Breite durch eine Reihe ausgedrückt. §. 183.

Der Halbmesser der Erde durch eine Reihe ausgedrückt.  
§. 184.

Aus der Schiefe der Ecliptic, der geraden Aufsteigung die Abweichung die Länge und Breite zu finden.

Berechnung der Länge und Höhe des Neunzigsten Parallels.

Berechnung der Parallaxen. §. 187.

Abkürzung der dazu erforderlichen Formeln.

H. Cagnoli's und H. Gersners Formeln. §.

Berechnung der Parallaxen ohne Berechnung der Sonnenparallaxen.  
§. 190.

Berechnung der wahren Zusammenkunft des Mercur mit der Sonne aus dem scheinbaren Abstand ihrer Mittelpunkte.  
§. 191.

Differentialformeln zur Bestimmung des Einflusses kleiner Fehler der bey der Rechnung zugelegten Elemente auf die Zeit der Zusammenkunft.  
§. 192.

*Anwendung der Methode, die Länge durch Beobachtung der Sonnenfinsternisse zu bestimmen.*  
§. 193. §. 194.

Bestimmung der Zeit der wahren Zusammenkunft der Sonnenfinsternisse aus Beobachtungen, des H. Grafen von Brühl in Göttingen.  
§. 195.

Aus der Beobachtung des H. von Zach in Gotha den Mittagsunterschied beyder Beobachtungsorter.

Vergleichung der Mondstafeln mit den Beobachtungen der Sonnenfinsternisse.  
§. 198.

Bestimmung der Zeit der wahren Zusammenkunft der Sonnenfinsternisse aus mikrometrischen Messungen.



**Verbesserung der mikrometrischen Messungen wegen der Strahlenbrechung. §. 200.**

**Bestimmung der Umstände, unter welchen es vortheilhafter ist, die Gröſſe des hellen Theils der Sonne als Schatten der verfinsterten Theile zu messen. §. 201.**

**Aus der Vergleichung mehrerer Beobachtungen die Fehler der bey der Rechnung gebrauchten Elemente herzuleiten. §. 202.**

***Bestimmung der Länge durch Bedeckungen der Fixsterne vom Mond. §. 203.***

**Reduction der Beobachtungen auf den Mittelpunkt der Erde. §. 204.**

**Anwendung der Methode, die Länge durch Fixsternbedeckungen zu bestimmen auf die Bedeckung des Aldebarans vom Mond d. 27 März 1792. §. 205 bis 208.**

**Untersuchungen über die Zuverlässigkeit solcher Beobachtungen. §. 209.**

**Ueber den Einfluß, welchen verschiedene Voraussetzungen der Abplattung der Erde auf die Längenbestimmung haben. §. 210. 211.**

**Anwendung auf obige Beobachtungen. §. 212.**

**Bestimmung der Abplattung der Erde durch Beobachtungen der Fixsternbedeckungen nach dem Vorschlag des H. von Zach. §. 213.**

***Bestimmung der Länge durch Abstände des Mondes von der Sonne und von Fixsternen. §. 214.***

**Den Abstand des Mondes von der Sonne oder einem Fixstern zu messen. §. 215.**

**Bestimmung des wahren Abstands aus dem scheinbaren, nach Borda. §. 216.**

***Dunthorn's Formel. §. 217.***

**Berechnung der zur Reduction der beobachteten Abstände erforderlichen Stücke. §. 218.**

**Erläuterung dieser Methode durch ein Beyspiel. §. 219.**

**Verbesserung der Abstände wegen der abgeplatteten Gestalt der Erde, Azimuthal- und Höhenparallaxe. §. 220. 221.**

***Die Borda'sche Formel, und Anwendung derselben. §. 222-224.***

**Den wahren Abstand aus dem scheinbaren genau zu finden. §. 225.**

*Bestimmung der Länge durch tragbaren.* §. 226.

Beyspiel einer Längenbestimmung durch Uhren.

*Bestimmung der Länge durch irdische.* §. 228.

Bestimmung der Länge durch Beobachtung der Motion des Mondes. §. 229.

*Das Azimuth eines Objects durch astronomische Beobachtungen zu bestimmen.* §. 230.

Gebrauch des Sextanten zur Bestimmung des Azimuths. §. 231.

Verbesserung der mit dem künstlichen Horizont gemessenen Höhen irdischer Objecte. §. 232.

Vermittelst des künstlichen Horizonts Höhen zu messen, die unter 2 Gr. sind. §. 233.

Eine andere Methode, Höhen- und Tiefenwinkel mit dem Sextanten zu messen. §. 234.

Reduction der schief gemessenen Abstände auf den Horizont. §. 235.

Erläuterung der Methode, das Azimuth eines Objects mit dem Spiegelsextanten zu bestimmen durch Beobachtung. §. 236.

### *Z u s ä z e.*

Zu §. 40. Bestimmung des Collimationsfehlers eines Fernrohrs durch den künstlichen Horizont.

Zu §. 69. Untersuchung der gefärbten Gläser.

Zu §. 81. *Simpson's* und *Bradley's* Formeln für die astronomische Strahlenbrechung. Reduction der *Mayerschen* Formel auf den von Bradley angenommenen Zustand der Atmosphäre sammt einer Correction, die die mittlere astronomische Strahlenbrechung nahe zu kommen.

Zu §. 103. Ueber die vortheilhafteste Methode, die Zeit bey den astronomischen Uhren aufzuhängen.

Zu §. 176. Zu finden, wie stark eine Fernröhrröhre vergrößert. *Ramsden's Dynameter.*

Zu §. 197. Ueber den Mittagsunterschied zwischen dem Sonnenstande und dem Stande der Sonne. *Harefield.*

Zu §. 215. Vergrößerung des Halbmessers des Fernrohrs. *Erklärung und Gebrauch der Tafeln.*

---

---

*Allgemeine Darstellung der Methode die  
geographische Lage eines Orts durch  
astronomische Beobachtungen zu bestim-  
men.*

---

§. 1.

**E**s seyen  $P$  und  $p$  die beyden Pole der Erd-<sup>Fig.</sup> kugel,  $O$  irgend ein Ort auf der Oberfläche der Erde,  $AQ$  der Aequator. Man lege durch die beyden Pole und durch  $O$  einen Kreis  $POAp$ , so heist man den Bogen  $AO$ , welcher den Winkel mißt, den die Verticallinie  $CO$  des Orts  $O$  mit der Ebene des Aequators macht, die *Breite* des Orts  $O$ ; sie ist *nördlich* oder *südlich* je nachdem der Ort  $O$  vom Aequator an gerechnet gegen den Nordpol  $P$  oder Südpol  $p$  der Erde hin liegt.

Ein anderer Ort auf der Erde seye  $o$ , ein Kreis durch ihn und durch die beyden Pole  $Poap$ .  $ao$  ist seine Breite. Wäre nun der Winkel  $APa$ , den die beyden Halbkreise durch  $O$  und  $o$  miteinander machen, und die Breite  $ao$  bekannt, so würde dadurch die Lage des Orts  $o$  gegen  $O$  bestimmt. Der  
A Win-

Winkel  $APa$  wird durch den Bogen des Aequators  $Aa$  gemessen. Man nimmt einen gewissen Punct  $A$  auf dem Aequator zum Anfangspunct an, von welchem die Bogen, wie  $Aa$  von Abend gegen Morgen gerechnet werden, alsdann heisst  $Aa$  die Länge des Orts  $a$ . Die Halbkreise  $POAp$  und  $Poap$  heisse Mittagskreise. Länge und Breite zusammen bestimmen also die *geographische Lage* eines Orts.

*Anmerkung.* Der Mittagskreis durch den Punct  $A$  von welchem an die Längen gerechnet werden, wird der *erste* Mittagskreis genannt, und gewöhnlich 2 Grade von der Pariser königlichen Sternwarte gegen Abend gesetzt, so dass hienach die Länge der Pariser Sternwarte  $= 20$  Gr. ist. Mehreres hievon findet man in Hrn. Hofrath Kästners angew. Mathematisches Geograph. 31.

## §. 2.

Man gedenke sich die Axe der Erde bis an die scheinbare Himmelskugel verlängert. Einer Ebene, welche die Erdoberfläche im Punct  $O$  berührt, Durchschnitt mit der Ebene durch jenen Punct, den Mittelpunkt und Pol der Erde  $O$ ,  $C$  und  $P$  seye  $O'C$  ist  $OT$  des Orts  $O$  Mittagslinie. Man ziehe nach dem Punct, wo die verlängerte Erde die Himmelskugel trifft eine Gerade  $O\pi$ , so hat man  $O'TC = \pi OT + O\pi$  oder macht sowohl der Winkel  $O'T'$  als Winkel  $ACO$  mit dem Winkel  $OTC$  rechten Winkel, folglich ist  $O'TC = \pi OT + O\pi$ . Aber wegen der

sen Entfernung der Fixsterne ist  $OT = 0$ , folglich  $ACO = OT$ , oder die Breite eines Orts ist seiner *Polhöhe* gleich.

### §. 3.

Nun seyen  $P$  und  $p$  die beyden Pole der Himmelskugel,  $Z$  der Punct, wo die verlängerte Verticallinie eines Orts auf der Erde die Himmelskugel trifft, so ist ein Kreis durch  $P, Z$  und  $p$  der Mittagskreis,  $PO$  die Polhöhe,  $HA = PZ =$  der Aequatorshöhe und beyder Summe  $= 90^\circ$ . Eines Sterns Abweichung seye  $Am$ , so wird er während seines täglichen scheinbaren Umlaufs zweymal in den Mittagskreis kommen, das eine mal über, das andere mal unter dem Pol, und wenn sein Abstand vom Pol  $Pn$  kleiner ist als die Breite  $PO$ , so wird man seine kleinste Höhe in  $n$  und grösste \*) in  $m$  messen können. Daraus findet sich  $2PO = Om + On$ ; folglich wäre die Breite gleich der halben Summe der grössten und kleinsten Höhe des Sterns \*\*). Wenn die Polhöhe grösser ist als  $45^\circ$ , so kann man eines Sterns kleinste Höhe noch beobachten, wenn

\*) Wenn in der Folge von der Mittagshöhe eines Sterns die Rede ist, so wird darunter immer seine grösste Mittagshöhe verstanden, ausser es werde ausdrücklich das Gegentheil erinnert.

\*\*) Beyder Höhen halber Unterschied ist des Sterns Abstand vom Pol. Hieraus erhellet, wie man die Abweichung eines Sterns bestimmen kann, ohne die Breite zu wissen. Die Abweichungen anderer Sterne lassen sich alsdann blos durch Unterschiede der Höhen bestimmen.



wenn auch seine Polardistanz grösser wäre als die Aequatorshöhe PZ. In diesem Fall würde die kleinste Höhe in dem nördlichen Theil des Meridians ZO, die grösste in dem südlichen ZH genommen. Da wäre also die Polhöhe

$$= \frac{180^\circ - H_s + O_t}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}(H_s - O_t).$$

#### §. 4.

Man hat Verzeichnisse von Fixsternen in welchen ihre Abweichungen, wie Am angegeben sind. Daraus findet man  $P_m = 90^\circ - A_m$ . Folglich kann man aus einer Mittagshöhe eines Sterns On die Breite finden; man hat nemlich für die Höhe unter dem Pol  $OP = On + P_n$ , und für eine Höhe über dem Pol  $OP = Om - P_m$ , oder die Breite ist = Höhe des Sterns  $\pm$  Polardistanz des Sterns. Wird die Höhe des Sterns in dem südlichen Theil des Meridians genommen, so hat man  $HA = H_s - A_s$  oder  $= H_u + A_u$ , oder die Aequatorshöhe ist für einen Stern von nördlicher Abweichung = dem Unterschied, für einen südlichen = der Summe der beobachteten Höhe und der Abweichung. Für eine südliche Polhöhe oder Breite fände sich, wie man leicht aus der Figur sehen kann, die Aequatorshöhe = der Höhe des Sterns  $\pm$  Abweichung, wo das obere Zeichen bey nördlicher das untere bey südlicher Abweichung gebraucht wird. Wenn man eines Sterns Höhe kennt, so weiss man auch seinen Abstand vom Scheitel oder Zenith, weil beyder Summe  $= 90^\circ$ ; ferner ist  $AZ = 90^\circ - AH =$  der Breite,

Breite, folglich läßt sich auch die Breite durch Zenithdistanz und Abweichung eines Sterns ausdrücken. Es ist nemlich  $AZ = As + Zs = Zu - Au$ , oder Breite = Abstand vom Zenith  $\pm$  Abweichung  $+$  für nördliche  $-$  für südliche Abweichung. Die verschiedenen hier vorkommenden Fälle hat Herr von Zach in folgende Tafel \*) gebracht:

*Anmerkung.* Die Methode (§. 3.) die Polhöhe durch die grösste und kleinste Höhe der Circumpolarsterne, welche nie untergehen, zu bestimmen, ist immer die sicherste. Allein man kann nicht zu allen Jahreszeiten Gebrauch davon machen, weil der Stern eine seiner Mittagshöhen bey Tage erreichen kann, da er nur durch sehr gute Fernröhren sichtbar ist. Ein reisender Beobachter, der die Breite eines Orts in einem Tage oder vielleicht in einigen Stunden bestimmen will, hat noch andere Methoden nöthig, wovon unten wird gehandelt werden.

1) Abstand vom Scheitel nördlich.			2) Abstand vom Scheitel südlich.		
1) Abw. nördlich		2) Abw. südlich	1) Abw. nördl.		2) Abw. südlich.
im I. Fall ist		im II. Fall	im III. Fall		im IV. Fall
ihr Unterschied		ihre Summe	ihre Summe		ihr Unterschied
die gesuchte Breite und zwar			Die gesuchte Breite und zwar		
nördlich	südlich	südlich.	nördlich.	nördlich	südlich
wenn die Ab- weich. grösser ist als der Ab- stand vom Scheitel.	wenn der Abst. vom Scheitel grösser ist als die Ab- weich.			wenn der Abst. vom Scheitel grösser ist als die Ab- weich.	wenn die Ab- weich. grösser ist als Abst. vom Scheitel.

Wenn die Höhe eines Sterns *unter* dem Pol beobachtet wird, so hat man  $AZ = An - Zn = 180^\circ$

\*) Casler und Meisnerische Quartalschrift III. Jahrgang Vtes Heft S. 41.

$180^\circ - Am - Zn$ . In diesem Fall wäre also die Polhöhe = der Ergänzung der Summe der Abweichung und des Abstands vom Scheitel zu  $180^\circ$ .

### §. 5.

Es seyen  $P$  und  $p$  die Pole,  $O$  und  $o$  zwey Oerter auf der Erde. Man ziehe die Halbmesser  $CO$  und  $CO'$  und an  $O$  und  $O'$  die Tangenten  $OT$ ,  $O'T'$ . Man beobachte in  $O$  die Mittagshöhe eines Sterns  $Tos$ . Zieht man durch  $O'$ ,  $O'S'$  mit  $OS$  parallel, so wird  $T'O'S$  die Höhe desselben Sterns in  $O'$  seyn. Nun ist  $Tos = Opq + pqO$ , aber  $opq = T'ps = T'o's'$  und  $pqO = O'CO$  folglich ist  $OCO' = Tos - T'O'S'$ . Mißt man also in  $O'$  die Mittagshöhe desselben Sterns, so ist der Unterschied der Höhen in  $O$  und  $O' =$  dem Unterschied der Breiten beider Oerter, und zwar liegt derjenige Ort unter einer geringern Breite, an welchem die Höhe eines gegen Norden culminirenden Sterns kleiner gefunden wird. Das Gegentheil findet bey einem gegen Süden culminirenden Stern statt. Da findet man also den Unterschied der Breiten aus dem Unterschied der Höhen, und braucht weder Abweichung des Sterns noch seine absolute Höhen zu wissen. Die Breite des Orts  $O'$  ist gegeben, wenn man die des Orts  $O$  kennt und umgekehrt.

### §. 6

Wir haben oben (§. 1.) gesehen, daß zur Bestimmung der geographischen Lage eines Orts

Orts ausser seiner Breite auch seine *Länge* erfordert wird. Die sicherste Methode sie ohne wirkliche Ausmessungen auf der Erde zu bestimmen, gründet sich auf die tägliche Umdrehung der Erde um ihre Axe. Wenn ein Stern durch die Ebene des Meridians Poap des Orts o Fig. 1 geht oder culminirt, so wird eben dieser Stern von dem Meridian des Orts O noch um den Winkel A Pa abstehen, folglich eine gewisse Zeit verfließen, bis er durch den Mittagskreis des Orts O geht. Diese Zeit ist so gros als die Zeit welche die Erde gebrauchte sich um den Winkel A pa zu drehen. Wäre diese Zeit sammt der Zeit der Umdrehung der Erde um ihre Axe gegeben, so könnte man, da die Umdrehung der Erde um ihre Axe gleichförmig ist, den Längenunterschied der Oerter O und o leicht finden. Man hätte die Proportion: Die Zeit der Umdrehung der Erde um ihre Axe verhält sich zu der Zeit welche die Erde gebrauchte sich um den Winkel A pa zu drehen, wie 360 Grade zu dem Längenunterschied beyder Oerter.

### §. 7.

Wenn man also wüßte um wie viel früher der Stern durch den Mittagskreis des Orts o gieng als durch den Mittagskreis des Orts O, so könnte man auch den Längenunterschied beyder Oerter finden. Man wird aber dieses bestimmen können, wenn in O und o die Zeiten einer gewissen Erscheinung, die sich für beyde Beobachter in O und o in *einem absoluten Augenblick* ereignet, nach gleichförmig

und mit gleicher Geschwindigkeit gehenden Uhren bemerkt, und überdiess die Zeiten beobachtet werden, da ein gewisser Stern durch die Meridiane der Oerter o und O gieng. Der Beobachter in O zähle  $M^{\text{St}}$  der in o  $m^{\text{St}}$  in dem Augenblick einer gewissen Erscheinung. Ferner culminire der Stern in O als die daselbst befindliche Uhr  $M'$  Stunden zeigte und in o da die Uhr in o  $m'$  Stunden zeigte, so sind von dem Augenblick der Erscheinung bis zu der Culmination des Sterns an dem Ort O verfloßen  $M' - M^{\text{St}}$  und bis zu der Zeit der Culmination desselben Sterns in o,  $m' - m^{\text{St}}$ . Folglich gieng der Stern früher durch den Meridian des Orts o als durch den Meridian von O,  $M' - M - (m' - m)$  St. Fände sich  $m' - m > M' - M$ , so läge der Ort O dem Ort o gegen Morgen. Verfließen nun von einer Culmination des Sterns bis zu der nächstfolgenden 24 St., so hat man die Längendifferenz beyder Oerter  $= \frac{360}{24} (M' - M - (m' - m)) = 15 (M' - M - (m' - m))$  Graden.

### §. 8.

Gewöhnlich giebt man die Zeit einer Beobachtung nach wahrer Sonnenzeit an, die Stunden von dem Augenblick an gezählt werden, da der Mittelpunkt der Sonne vñrt. Geben nun zwey Beobachter der Augenblick einer und derselben Erscheinung der nach wahrer Zeit seines Orts an, so der Unterschied beyder Zeiten, welcher *Mittagsunterschied* heißt, um wie viel die Sonne früher an dem einen Ort culmi-



an dem andern. Da ferner 24 Stunden von einer Culmination der Sonne bis zu der nächstfolgenden verfließen, so hat sich die Erde in dieser Zwischenzeit in Beziehung auf die Sonne einmal um ihre Axe umgedreht. Daher giebt ebenfalls eine Stunde Meridiandifferenz in wahrer Sonnenzeit 15 Grade Unterschied in der Länge. Man mag also die Zeit der Beobachtungen nach Sternzeit oder nach wahrer Sonnenzeit angeben, so findet man immer aus dem Mittagsunterschied zweyer Oerter ihren Längenunterschied, wenn man 15° auf eine Stunde rechnet. Dasselbe gilt, wie man leicht siehet, auch von mittlerer Zeit.

### §. 9.

Es lässt sich also die Bestimmung der Länge auf folgende Aufgabe bringen. Man weiß, wie viel Uhr es an einem gewissen Ort ist, man solle bestimmen, wie viel Uhr es in demselben Augenblick an einem andern Ort ist, dessen Länge man kennt. Dazu könnte man ein gemeinschaftliches Zeichen oder Signal gebrauchen, das man den beyden an den Oertern, deren Längenunterschied man bestimmen will, befindlichen Beobachtern zugleich geben könnte. Dieses gehet aber nur in kleinen Entfernungen an. Man wählte daher zu dieser Absicht gewisse Himmelsbegebenheiten, die sich theils *wirklich*, theils *nur scheinbar* ereignen. Zu den ersten gehören Anfang und Ende der Mondsfinsternisse, Ein- und Austritte der Mondsflecken in und aus dem Schatten der Erde, Ein- und Aus-

tritte der Jupiterstrabanten in und aus dem Schatten ihres Hauptplaneten. Zu den letztern gehören Sonnenfinsternisse, Bedeckungen der Fixsterne und Planeten vom Mond, Vorübergänge der Venus und des Mercur vor der Sonnenscheibe, Bedeckungen der Fixsterne von Planeten. Diese Erscheinungen hängen von dem Ort des Beobachters auf der Erde ab, und ereignen sich für Beobachter an verschiedenen Oertern der Erde nicht in *einem* Augenblick. Man muß sie daher auf den Mittelpunkt der Erde reduciren, wenn man daraus die Meridiandifferenz herleiten will. Endlich kann man vermittelst einer guten tragbaren Uhr, die indem sie von einem Ort zu dem andern gebracht wird, ihren Gang nicht ändert, die Meridiandifferenz sehr genau bestimmen. Denn hat man diese nach der Zeit eines gewissen Orts gestellt oder ihre Abweichung davon beobachtet, so läßt sich vermittelst derselben an jedem Ort, dessen Zeit man weiß, die im Anfang dieses § erwähnte Aufgabe unmittelbar auflösen.

### §. 10.

Aus dem bisher gesagten erhellet, man zweyerley Arten von Instrumenten thig habe, um die geographische Lage Oerter durch astronomische Beobachtungen zu bestimmen, nemlich Instrumenten zu *Lenmessungen* und zu *Zeitmessungen* ferner die zur Bestimmung des Mittelschieds der Oerter dienende Himmelsheuten beobachten zu können,

man *Fernröhren* oder *Telescope*, weil man mit unbewafnetem Auge nicht so genau beobachten, ja einige der oben §. 9. erwähnten Erscheinungen nicht einmal würde bemerken können. Die Breite kann man zwar ohne eine Uhr dabey zu gebrauchen, bestimmen, wenn man darauf Achtung gibt, wenn ein Stern seine größte oder kleinste Höhe erreicht. Allein man wird die Breite, wie wir in der Folge sehen werden, genauer bestimmen können, wenn man vermittelst einer Uhr genau die Zeit des Durchgangs durch den Mittagskreis angeben kann.

*Beschreibung der zur geographischen Ortsbestimmung erforderlichen Instrumente.*

§. 11.

Auf einer Ebene ABC Fig. 6. Taf. II. seye ein Kreisbogen AB beschrieben, und in Grade, Minuten u. s. w. eingetheilt. Um den Mittelpunkt dieses Kreisbogens seye ein Lineal CF in der Ebene ABC beweglich. Man bringe einen Halbmesser desselbigen in die verticale Lage CA, welches man durch einen von dem Mittelpunkt C herabhängenden mit einem Gewicht beschwerten Faden (Bleyfaden, Loth,) CP bewerkstelligen kann. Macht man  $AB = 90^\circ$  und zieht BD, so ist BD horizontal, und eines Gegenstands G Höhe ist gleich dem Winkel DCG, sein Abstand vom Zenith = ECG. Hat man nun ein Mittel, das Lineal CF in die Richtung CG zu bringen, so wird man den  
Win-

Winkel DCG messen können. Denn wenn GF eine gerade Linie ist, so ist  $ACF = ECG =$  dem Abstand des Gegenstands G vom Scheitel, und  $BCF = DCG =$  seiner Höhe, und die Winkel ACF oder BCF gibt der eingetheilte Gradbogen AB an. Anstatt ein bewegliches Lineal CF anzubringen, kann man auch den ganzen Quadranten ABC Fig. 7 bewegen, und einen seiner Halbmesser CA in die Richtung des Lichtstrahls CG bringen, so gibt ein von dem Mittelpunct C herabhängendes Loth den Abstand vom Scheitel ACF und Höhe BCF an. Wenn nicht die Bewegung des ganzen Werkzeugs, die um seinen Schwerpunct H geschieht, mit einigen Unbequemlichkeiten verbunden wäre, so scheint letztere Art von Quadranten, die bey den Franzosen gebräuchlich ist, Vorzüge vor der ersten *englischen* zu haben, weil bey dieser sowohl in der Richtung des Halbmessers AC als in der Bemerkung des Puncts, welchen das Lineal CF anzeigt, Fehler begangen werden können, da man bey der französischen Art nur nachsehen darf, wo der Bleyfaden CP hintrifft. Endlich kann man dem Quadranten auch die Lage DCE Fig. 6 geben. Diese Art wurde von ältern Astronomen gebraucht, jezo zieht man die englische Einrichtung der Quadranten den andern vor. Das Lineal C heißt die *Alhidada*.

#### §. 12.

Wegen der grossen Entfernung der Himmelskörper ist es gleichgültig, ob man

oder eine damit parallele Linie fh nach dem Stern richtet, dessen Höhe man messen will. Ebenso kann bey dem Quadranten Fig. 7 a c die Stelle der Linie A C vertreten. Weil man bey dem Quadranten Fig. 6 den Bleyfaden nicht wohl am Mittelpunct C anbringen kann, so verlängert man den Halbmesser B C nach c und den Gradbogen B A nach a, hängt das Loth in c auf und läßt es auf einen von A C um  $Aa = Cc$  abstehenden Punct fallen, so ist auch A C vertical. Auch siehet man leicht, daß a c Fig. 7 oder fh Fig. 6 auch außerhalb der Ebene des Quadranten liegen können, wenn nur diese Linien jener Ebene parallel sind. Um die Linie fh in die Richtung der Linie gh bringen zu können, wurde bey h senkrecht auf der Ebene des Instruments ein feiner Faden und auf diesen und fh senkrecht ein zweyter Faden ausgespannt, der also der Ebene des Quadranten parallel war. Bey f wurde senkrecht auf fh eine Platte angebracht, die eine kleine von der Ebene des Quadranten eben so weit abstehende Oefnung hatte, als der Durchschnitt der beyden Fäden bey h von einander abstund. Eine durch jene Oefnung und den Durchschnitt beyder Fäden gezogene gerade Linie heist die *Absehenslinie* oder *Visirlinie* (linea collimationis) und ein mit dieser Vorrichtung versehenes Lineal ein *Dioptrilineal*, dergleichen man noch an den gewöhnlichen Feldmessers-Instrumenten findet.

## §. 13.

Statt der Diopterlineale gebraucht man jezo Fernröhren, vermittelt welcher man weit genauer als mit dem bloßen Auge beobachten kann. Die erste Nachricht von der Anbringung der Fernröhren an die Alhidade findet man bey Morin (*Scientia longitudinum* 1634.). Huygens brachte zuerst die Fäden im gemeinschaftlichen Brennpunct der beyden Gläser des astron. Fernrohrs an, ohne welche eine mit einem Fernrohr versehene Alhidade keinen Vorzug vor einem gewöhnlichen Diopterlineal haben kann. Auzout und Picard brachten im Jahr 1667 die Fernröhre an den Quadranten statt der Dioptern an, letzterer beobachtete im October 1667 Sonnenhöhen mit einem Quadranten von 9 Fuß 7 Zollen, und einem Sextanten von 6 Fuß im Halbmesser, an welchen Gläser die Stelle der Pinnacidien vertraten. Die Art, wie Fernröhren zu dieser Absicht gebraucht werden, wird aus folgendem erhellen. Die Linse B mache von dem Gegenstand Aa das Bild  $\alpha\beta$ , so daß der Punct A in  $\alpha$ , a in  $\beta$  abgebildet wird. Zieht man die Hauptstrahlen  $A\alpha$ ,  $a\beta$ , so schneiden sie sich sehr nahe in einem Punct, welcher der *Mittelpunct der Linse* oder *Mittelpunct der Brechung* heißt, und immer in der geraden Linie Ee liegt, welche die Mittelpuncte E und e der die Linse auf beyden Seiten begränzenden Kugelflächen verbindet. I nun an der Stelle des Bilds  $\alpha\beta$  ein Fadenkreuz und bey D eine convexe Linse anbracht, deren Brennpunct in  $\alpha$  fällt, so

man ein astronomisches Fernrohr, und ein Punct eines Gegenstands, der von dem Durchschnittspunct der beyden Fäden bedeckt wird, befindet sich mit dem Gegenstand, dem Mittelpunkt der Brechung des Objectivglases und jenem Durchschnittspunct in einer geraden Linie. Man wird also die Linie, welche den Mittelpunkt der Brechung des Objectivs und den Durchschnitt des Fadenkreuzes miteinander verbindet, und auch die *Absehenslinie* heißt, desto genauer in die Lage des Lichtstrahls CA bringen können, je feiner die Fäden sind, und je besser die Fernröhre ist.

#### §. 14.

Ausführliche Beschreibungen und Abbildungen der astronomischen Quadranten findet man in den Schriften, die von der Figur der Erde handeln, in Smiths Lehrbegrif der Optic, la Lande's Astronomie, Lowiz Beschreibung eines Quadranten (enthält auch Anleitungen zur Verfertigung und Eintheilung derselbigen), Amman's Quadrans astronomicus novus, The Method of constructing Mural Quadrants by Mr. John Bird, London MDCCLXVIII. The Method of dividing Astronomical Instruments by John Bird hat Herr Hofrath Kästner ins Deutsche übersezt, und in die zweyte *Sammlung seiner astronomischen Abhandlungen* eingedruckt. Olaus Römer zog ganze Kreise den Quadranten vor, so wie gegenwärtig *Ramsden* in London, der wegen seiner vortreflichen astronomischen Werkzeuge bekannt ist.



*Beschreibung eines hölzernen Quadranten.*

§. 15.

Die 9te und 10te Figur Taf. III stellen diesen Quadranten perspectivisch vor. Er ist aus vier Parallelepipedis von 2 Zollen Breite und  $1\frac{1}{2}$  Z. Dike AC, DE, FG, HF und aus dem Gradbogen AB ebenfalls von 1 Z. Breite und  $1\frac{1}{2}$  Dike so zusammengesetzt, daß die Oberflächen der erstern mit der Ebene des Gradbogens *eine Ebene* machen. Die Fernröhre KL bestehet aus einem hohlen Parallelepipedo, an welchem zwey gleich dike Platten tu und rs befestigt sind, wovon die erstere zum Vernier die zweyte zur Befestigung eines stählernen conischen Zapfens dient, der sich in einer ähnlichen Vertiefung eines Stücks Messing dreht, welches an dem Mittelpunct des Quadranten fest sitzt. Auf der Schraubzwinge op sitzt die Noniusplatte tu auf, und man kann sie an verschiedenen Stellen des Gradbogens befestigen um die Fernröhre KL in ihre gehörige Lage zu bringen. Der ganze Quadrant ist vermittelst zweyer Schrauben kk, ll, an die Axe MN befestigt. Das Loch für die Schraube l ist länglicht, und mit einer Platte bedekt; daher kann man dem Quadranten eine kleine Bewegung um den Mittelpunct l geben. Diese wird durch zwey einander gegenüberstehende Schrauben bewerkstelligt wovon die eine bey q zu sehen ist, und deren Muttern sich in den beyden an der MN befestigten Baken m und n befinden. Wenn man nemlich die Schraube q e

zurückschraubt, so kann man mit der gegenüberstehenden das Stük F G an erstere Schraube wieder andrücken und umgekehrt. Man siehet diese Vorrichtung in der 19 Fig. Taf. II, von einer andern Seite.

### §. 16.

Der Quadrant ist unter einem gegen Mittag liegenden Fenster aufgestellt. Das Fenstergesimse oder die Fensterbank O Q q trägt einen Würfel fg, der durch vier Schrauben, wovon man drey c d e in der Figur siehet, nach allen Richtungen ein wenig hin und her geschoben werden kann, und oben eine conische Spize von Stahl hat, die in eine conische Vertiefung eines in der Axe MN befestigten Stüks von Messing oder Horn paßt. Oben bey M ist eine ähnliche conische Vertiefung für die conische Spize der Schraube hi. Diese hat ihre Mutter in dem Querbalken R S, der durch zwey Schrauben R und S an der Wand befestigt wird. Die Spize unten bey fg und die oben bey i müssen sich in einer Verticallinie befinden, daher hat der Querbalken R S ein vorspringendes Stük  $\epsilon \zeta$ . Die Regel T U dient zur Befestigung des Quadranten in einer Verticalebene, und läßt sich, wenn man die Schraube T löst, in dem Stük T U, das sich um seine verticale Axe drehen und durch die Schraube V befestigt werden kann, hin und her schieben. Das Stük  $\beta$  ist an dem Gradbogen befestigt, hat einen cylindrischen Zapfen, der sich mittelst der Schraube  $\delta$  in einer länglichten Oefnung der

B

Re-

Regel TU verschieben läßt, und oben eine Schraube  $\gamma$  hat. Da man den Quadranten, wie man in der roten Figur siehet, nicht mehr viel weiter aus der Mittagsebene rücken kann, so ist in dem Querbalken RS ein anderes Loch W für den Zapfen des Stücks TV, um die Regel auf die andere Seite zu bringen.

§. 17.

Gewöhnlich gibt man den Quadranten ein eigenes Gestell mit drey oder vier Füßen, dergleichen auch bey einigen Feldmesserswerkzeugen gebraucht werden. Ich wählte die im vorhergehenden § beschriebene Einrichtung aus folgenden Gründen. In einem gewöhnlichen Zimmer kann man den Quadranten mit seinem Gestelle nicht wohl so nahe an das Fenster bringen, daß man etwas grose Höhen noch damit messen kann; bey der hier beschriebenen Einrichtung kommt die Hälfte des Quadranten außerhalb des Gebäudes so daß man bis zu dem Zenith hin sehen kann. Der Quadrant hat eine sehr sanfte Bewegung um die Axe MN, um ihn in verschiedene Verticalkreise zu bringen, welches bey Stativen nicht leicht zu erhalten ist. Endlich haben Stative noch die Unbequemlichkeit, daß man sie nur auf einem sehr festen Boden gebrauchen kann. Wenn der Boden im Hin- und Hergehen etwas nachgibt, so verrückt sich der Quadrant immer wieder wenn man den Bleyfaden gestellt hat, und nun zu der Fernröhre zurückkehrt um die Höhe zu messen. Ich setze freylich voraus, n  
h

habe von einem gegen Mittag gelegenen Zimmer eine etwas freye Aussicht. Allein man wird in einem Zimmer, das auch gegen  $45^\circ$  von dem Mittag abweiche, noch die Mittags-höhe messen können; nur fiel alsdann die Bequemlichkeit weg, mit dem Quadranten correspondirende Höhen nehmen zu können, ohne genöthigt zu seyn, ihn an einer andern Stelle aufzurichten.

### §. 18.

Ich komme nun auf die ausführlichere Beschreibung der einzelnen Theile dieses Quadranten. Der Bogen AB ist aus zwey gleichen Stücken zusammengesetzt wie man im Profil bey \*\* siehet, wo das Zwischenstück ab zur Verbindung dient. Es wurde zu dem Quadranten trockenes Birnbaumholz gebraucht, und die beyden Stücke des Gradbogens wurden so aus dem Holz herausgehauen, daß die Längensfasern des Holzes der Chorde parallel lagen, welche man sich an die beyden Endpunkte des Stücks AF, das etwas über  $45^\circ$  faßt, gezogen vorstellen kann. Die beyden Stücke AC, DE sind, wie man bey Fig. II siehet, zusammengefügt, und ebenso liegen die Stücke FG, HI bey X übereinander. Bey F, H, D, G, I, A endigen sie sich in Zapfen, durch welche alle bisher erwähnte Theile des Quadranten so miteinander verbunden werden, daß alle Flächen, welche der Fernröhre KL zugekehrt sind, in einer Ebene liegen. Um den Gradbogen zu untersuchen, und alle Punkte desselbigen in eine Ebene zu bringen,

B 2

gen,

gen, bediente ich mich einer genauen Sezwa-  
ge, vermittelst welcher ich zwey Halbmesser  
des Quadranten AC, DE in eine horizontale  
Lage brachte. Nun untersuchte ich, ob auch  
die übrige Punkte des Gradbogens in einer  
horizontalen Ebene lagen, welches Statt ha-  
ben müßte, wenn der Gradbogen AB richtig  
gearbeitet wäre. Man konnte die Erhöhun-  
gen und Vertiefungen leicht entdecken, und  
so lange nachhelfen, bis der Bleyfaden der  
Sezwage bey ihrem Umdrehen um den Mittel-  
punct des Gradbogens nicht mehr von seinem  
Punct abwich. Der ganze Quadrant wurde  
nun mit Zinfolie oder Staniol überzogen, um  
die Feuchtigkeit abzuhalten, den ebenen  
Theil des Gradbogens ausgenommen, auf  
welchen die Abtheilungen kommen, der mit  
seinem Papier oder Pergamen überzogen wird.

### §. 19.

Die Vorrichtung an dem Mittelpunct zeigt  
die 12te Figur in ihrer natürlichen Gröfse.  
rs ist die an der Fernröhre befestigte Platte,  
welche mit 3 Schrauben M, N, auf eine stähler-  
ne Scheibe AB aufgeschraubt ist, die einen  
aus zwey abgekürzten Regeln bestehenden  
stählernen wohl polirten Zapfen CD hat.  
Dieser dreht in dem Stük Messing EFG, wel-  
ches oben eine runde Platte EF hat, die in  
das Stük AC Fig. 9 eingesenkt und mit Schrau-  
ben op befestigt wird. Unten ist eine ähnli-  
che Platte HI, die zugleich eine Schrauben-  
mutter für eine an dem Stük G befindliche  
Schraube ist, und durch einen Schlüssel, der  
in

in die Löcher *mn* paßt, angezogen wird. Das Ende des Zapfens *CD* ist viereckigt, und geht durch eine messingene Platte *k*, auf welche die Schraube *L* drückt, um den Zapfen in seiner Höhlung zu halten. Zwischen den Platten *AB* und *EF* muß ein kleiner Zwischenraum bleiben, um die Reibung zu vermeiden. *P* Fig. 18 stellt einen messingenen doppelten Kegel vor, der genau in die Höhlung des Stücks *EF G* paßt, und durch einen Schlüssel *Q* der in die Löcher *ab* paßt, in jener Höhlung umgedreht werden kann. Auf demselben ist der Punct *c* bemerkt, wo die gemeinschaftliche Axe beyder Kegel die Grundfläche *ab* trifft. Der Gebrauch davon wird unten gezeigt werden.

### §. 20.

Auf dem Gradbogen *AB* liegt die Fernröhre *KL* auf, und wird durch eine Feder von dünnem Messingblech *θ* beständig gegen denselben ein wenig angedrückt. Für diese Feder ist bey *λ* ein Einschnitt in die Säule *MN* gemacht, wenn die Fernröhre an die Stelle *G* Fig. 9 kommt. Die Röhre *KL* ist ein aus vier Bretchen von 3 Lin. Dike zusammengesetztes holes rechtwinklichtes Parallelepipedum. Die Seitenflächen sind 20 Zolle lang und 2 Zolle breit. Die Weite der innern Hölung *ef* Fig. 13 beträgt 1 Z. 6 Lin. Rechtwinklicht auf die Seitenflächen stehet in einer Tiefe von 3 Lin. in der Röhre ein 6 Linien dikes genau darein passendes Parallelepipedum von Holz *A* mit einem runden Loch von 1 Zoll im Durch-

B 3

mes-



**messer.** Auf diesem liegt die viereckigte Fassung des Objectivglases B auf, welche aber die Hölung efgh nicht ganz ausfüllen darf, damit man dem Objectiv noch eine kleine Bewegung vermittelt der vier Schrauben abcd geben kann. In das andere Ende der Röhre KL paßt genau die Röhre von Pappe v und V Fig. 14, welche bey C ihre Blendung hat, auf der eine messingene Platte de mit einer runden Oefnung von 7 Lin. im Durchmesser liegt. Diese trägt zwey in dem Mittelpunct der kreisförmigen Oefnung sich rechtwinklicht durchschneidende Fäden, welche mit Wachs oder kleinen Schrauben befestigt werden. In diese Röhre schiebt sich die Ooularröhre W mit der Linse B von 1 Zoll. 6 Lin. Brennweite. Die Brennweite des Objectivs ist 20 Zolle, folglich die Vergrößerung  $13\frac{1}{3}$ . Auf die Röhre KL paßt der Dekel yz Fig. 9, welcher eine runde Oefnung von 7 Lin. hat, und die Bedekung des Objectivglases abgibt, zugleich aber auch mit einer unter einem Winkel von  $45^\circ$  gegen die Axe der Fernröhre geneigten Platte x versehen ist, die in der Mitte eine elliptische Oefnung hat, deren kleinere Axo 7 Lin. beträgt, und sich zu der größern senkrecht auf die gemeinschaftliche Durchschnittsline der Ebene x und der Ebene des Dekels stehenden Axe wie  $1 : \sqrt{2}$  verhält. Sie dient zur Beleuchtung des Fadenkreuzes, wenn man bey Nacht Sterne beobachtet. Um der Fernröhre eine sanfte Bewegung zu geben, bringt man zwischen die Vernierplatte Fig. 9 und die Schraubzwinge p den Keil \* so daß

a b



ab auf om Fig. 9 zu liegen kommt, und die Vernierplatte u auf cd \* aufsitzt, alsdann kann man durch Hin- und Herschieben des Keils die Fernröhre ein wenig höher oder tiefer stellen.

### §. 21.

Die 15te Figur zeigt die Vorrichtung, wodurch die Säule MN vertical gestellt wird. Innerhalb der Rahme AB liegt der Würfel fg, welcher durch die vier Schrauben cdeh hin- und hergeschoben und befestigt werden kann. Durch die Löcher iklm gehen vier Schrauben, vermittlest welcher diese Vorrichtung auf die Fensterbank O Q q Fig. 9 aufgeschraubt wird. Die Richtung des Quadranten geschieht nach einem Bleyfaden CP, der über zwey kurze über die Oberfläche des Quadranten gleich viel hervorragende messingene Cylinder herabhängt. Der eine befindet sich bey C, der andere  $\alpha$  bey B. Auf der Grundfläche dieser Cylinder befinden sich feine Punkte, auf welche der Bleyfaden treffen muß. Zu der Aufhängung des Fadens kann man sich der Figur 16 gezeichneten Vorrichtung bedienen, wo a der messingene Cylinder, cd ein Träger ist, welcher die Nadel b aufnimmt, deren Spitze auf den auf der Grundfläche des Cylinders a gemachten feinen Punct trifft, und den Faden ef trägt. Vorzüglicher ist die Fig. 17. vorgestellte Art, den Faden aufzuhängen. In dem auf den Quadranten aufgeschraubten Stück de dreht sich die Schraube bc, in welche bey b eine Kerbe eingedreht ist, um den

B 4 Faden

Faden ef aufzunehmen. Durch Umdrehung der Schraube bc kann man also den Faden so lange verschieben, bis er genau auf die Punkte der Cylinder a Fig. 17 (bey C Fig. 9) und  $\alpha$  Fig. 9 trifft.

### *Eintheilung des Quadranten.*

#### §. 22.

Wer die Eintheilungen auf 'den Quadranten machen will, muß mit einem Stangenzirkel von  $1\frac{1}{2}$  Fuß und einem Uhrmacher- oder Federzirkel versehen seyn. Eine vorzüglich gute Einrichtung eines Stangenzirkels beschreibt Herr von Zach in dem 1 Supplementenband zu den Berl. astr. Jahrbüchern S. 189 u. f. nach welcher Herr Secret. Schröder in Gotha dieses Instrument in groser Vollkommenheit verfertigt. Es wird nur noch eine Reisfeder erfordert, die man anstatt einer Spitze anschrauben kann. Will man nun die Eintheilungen auf den Quadranten machen, so nimmt man die Fernröhre weg, und bringt an die Stelle des Zapfens CD Fig. 12 den gedoppelten Kegel P Fig. 18; seine Grundfläche ab muß alsdann mit der Oberfläche der Platte EF und des ganzen Quadranten in einer Ebene liegen. Nun muß die größte Sorgfalt darauf verwendet werden, genau seinen Mittelpunkt c zu bezeichnen. Zu diesem Ende bringt man die eine Spitze des Stangenzirkels in einen beliebigen Punct des Gradbogens, die andere so genau in den Mittelpunkt des

Cen-

Centralzapfens P als es vermittelt des bloßen Augenmaßes geschehen kann, und beschreibt auf der Oberfläche desselben einen kleinen Bogen. Nun dreht man vermittelt des Schlüssels Q den Zapfen ein wenig um seine Axe, und beschreibt aus demselben Punct und mit derselben Oefnung des Zirkels einen zweyten Bogen auf der Oberfläche desselben. Dieses setzt man so lange fort, bis die ganze Oberfläche mit Kreisbögen überzogen ist, und die Gestalt Fig. 20 bekömmt. In der Mitte wird sich eine kleine runde Stelle zeigen, auf welcher sich kein Bogen befindet, und die, wenn man sehr nahe den Mittelpunct getroffen hat, so klein ist, daß man sie nur mit einem Vergrößerungsglas erkennen kann. In der Mitte dieser Stelle kann man nun vermittelt einer feinen stählernen Spize den Mittelpunct bezeichnen. Hätte man gleich anfangs mit der Spize des Stangenzirkels den Mittelpunct getroffen, so würden sich alle Bögen in *einem* Punct durchschnitten haben, welcher nicht mehr leicht würde zu erkennen gewesen seyn, wenn so viele Bogen wären gezogen worden. Daher ist es besser, anfangs nach jeder Viertelswendung des Zapfens einen Bogen zu beschreiben, so daß man nur vier derselben bekommt, und vermittelt eines Vergrößerungsglases zu untersuchen, ob sich alle in einem Punct schneiden, welches der Mittelpunct wäre. Ist dieses nicht, so wird man ein kleines Viereck finden, in dessen Mittelpunct sich der Mittelpunct des Centralzapfens befindet, und welches dazu dienen wird, das oben ge-

sagte desto leichter zu bewerkstelligen. Nachdem man den Mittelpunkt bezeichnet hat, schleift man die gezogenen Kreisbögen weg. Man kann nun auf die Centralplatte EF einen feinen Faden mit Wachs aufkleben, der durch den Mittelpunkt des Centralzapfens geht. Ist dieser gut bezeichnet, so muß er von dem Faden beständig bissecirt werden, wenn man den Zapfen dreht.

### §. 23.

Nun beschreibt man aus dem Mittelpunkt des Centralzapfens einen Kreisbogen *abcd* Fig. 19 Taf. II, der von dem äußern Rande des Kreisbogens ungefähr 2 Lin. absteht. Den Halbmesser trägt man von *a* nach *c*, so ist der Bogen  $ac = 60^\circ$ ; *ac* wird halbirt in *b*, so hat man  $bc = 30^\circ$ , dieser Bogen von *c* nach *d* getragen bestimmt der gosten Grad. Werden die Bögen *ab*, *bc*, *cd* noch einmal halbirt, so ist der Quadrant von 15 zu 15 Graden abgetheilt. Nun müßte man jeden dieser Bögen in 3 und weiter in 5 gleiche Theile theilen. Weil man dieses nicht so leicht und so genau als bloße Halbirungen bewerkstelligen kann, so theilte man den Quadranten durch fortgesetzte Halbirungen in 96 gleiche Theile, welches geschieht, wenn man den Bogen von 15 Graden viermal nacheinander halbirt. Graham hat diese Eintheilung zuerst 1725 an einem eisernen Quadranten angebracht. Der Markscheidercompaß enthält, wie Herr Hofrath Kästner bemerkt \*), eine ähnliche Eintheilung

\*) Astron. Abhandlungen II Sammlung. S. 160. Anleitung zur Markscheidekunst §. 284.

lung. Jeden dieser 96 Theile habe ich wieder in 4 gleiche Theile abgetheilt, und die Halbirungen, welche auf die erste Halbirung des Bogens von  $15^\circ$  folgten, vermittelst des Federzirkels bewerkstelligt. Hier betragen also  $\frac{16}{96}$  Theile 15 Grade, folglich ist  $\frac{1}{96} = 56' 15''$ . Hienach läßt sich eine Tafel berechnen, vermittelst welcher man diese Eintheilungen in Grade, Minuten und Secunden verwandeln kann. Siehe Taf. I.

### §. 24.

Wenn man nach einem genau eingetheilten Maßstab den Halbmesser eines auf dem Quadranten beschriebenen Kreisbogens mißt, so kann man daraus die Chorde von  $16^\circ$  Graden berechnen. Würde diese auf den Quadranten aufgetragen, so ließe er sich durch fortgesetzte Halbirungen in einzelne Grade und ferner von 15 zu 15 Minuten eintheilen. Man sieht leicht, daß der Maßstab sehr genau muß eingetheilt seyn, weil davon die Genauigkeit der Eintheilungen des Quadranten selbst abhängt. Ich habe mir die Mühe einen eigenen Maßstab zu verfertigen durch folgendes Hülfsmittel zu ersparen gesucht. Den Halbmesser  $aC$  theilte ich in 16 gleiche Theile, welches durch fortgesetzte Halbirungen geschehen kann. Mit dem Halbmesser  $Ce = \frac{1}{16}$  des Halbmessers  $aC$  beschrieb ich einen zweyten Kreisbogen  $e$ , und trug auf denselben die Chorde von  $\frac{4}{96}$  des Bogens  $abcd$ , so hatte ich sehr nahe auf dem Bogen  $e$  einen Bogen von vier Graden. Denn es seyen  $AD, BE$

Fig.



Fig. 21 Taf. II; zwey concentrische Bogen, deren Chorden AD, BE gleich sind, so verhält sich

$$\sin \frac{1}{2} ACD : \sin \frac{1}{2} BCE = BC : AC$$

Hier ist  $ACD = \frac{4 \cdot 90}{96}$  Graden  $= 3^\circ 45'$  und

$BC : AC = 15 : 16$ , folglich

$$\sin \frac{1}{2} BCE = \frac{15}{16} \sin \frac{1}{2} (3^\circ 45')$$

Nun ist

$$\text{Lg } 16 = 1,2041200$$

$$\text{Lg } \sin (1^\circ 52' 30'') = 8,5148011$$

$$9,7189211$$

$$\text{Lg } 15 = 1,1760913$$

$$\text{Lg } \sin \frac{1}{2} BCE = 8,5428298$$

$$\frac{1}{2} BCE = 2^\circ 0' 0'', 176$$

$$BCE = 4 \ 0 \ 0, \ 35$$

Wird dieser Bogen zweymal nacheinander halbirt, so hat man den Bogen von einem Grad bis auf 0,08 Secunden genau. Nun setzte ich diesen Bogen von  $1^\circ$  zu dem Bogen von  $15^\circ$  hinzu, so erhielt ich einen Bogen von 16 Graden, welcher durch Halbirungen von 15 zu 15 Minuten eingetheilt wurde. Ebenso verfuhr ich mit den übrigen Sechstheilen des Quadranten.

### §. 25.

Ich hatte also jetzt auf dem Quadranten zwey Bogen  $abcd$  und  $ev$ , wovon der erste in 4.96 Theile der zweyte in 4.90 Theile abgetheilt war. In der 22ten Figur, welche einen Theil des Gradbogens sammt dem Vernier in seiner natürlichen Gröse vorstellt, sind diese

Bogen

Bogen  $a b$  und  $k$ ; ihre Halbmesser  $= 17 \text{ Z. } 9 \text{ Lin}$  und  $= 16 \text{ Z. } 7\frac{1}{2} \text{ Lin}$ . Nun wurden noch 4 andere Bogen  $c d$ ,  $e$ ,  $h i$  und  $f g$  mit den Halbmessern  $17 \text{ Z. } 3 \text{ Lin}$ ;  $17 \text{ Z. } 1\frac{1}{2} \text{ Lin}$ ,  $16 \text{ Z. } 6 \text{ Lin}$ . und  $16 \text{ Z. } 2 \text{ Lin}$ . gezogen, zwischen welche die Abtheilungen kommen sollten. Die Theilstriche zog ich nach Birds Methode mittelst des Stangenzirkels \*). Ich zog an den Bogen  $e$  Fig. 22,  $t v$  Fig. 19 eine Tangente  $t b$ , welche ich so weit verlängerte bis sie den Bogen  $a b c d$  durchschnitt in  $b$ . Mit dem Halbmesser  $b t$  wurden nun zwischen den Bogen  $e$  und  $c d$  Fig. 22 die Theilstriche gezogen, für ganze Grade bis an den Bogen  $a b$ . Die Richtigkeit dieses Verfahrens erhellet aus folgendem. Es seyen  $A D$ ,  $a d$  Fig. 23 zwey aus dem Mittelpunct  $C$  beschriebene Bogen. Der Winkel  $A C B = B C D$ . Man ziehe mit einerley Halbmesser aus den Mittelpuncten  $A, B, D$  kleine Bogen, welche den Bogen  $a, b, d$  durchschneiden, und an diese Durchschnittspuncte die Halbmesser  $C a, C b, C d$ ; so sind die Drey-ecke  $A a C, B b C, D d C$  einander gleich, weil ihre Seiten einander gleich sind, folglich sind auch die Winkel  $A C a, B C b, D c d$  einander gleich. Nun ist  $b C a = B C b - B C a$  und  $A C B = A C a - B C a$ , folglich  $B C A = b C a$  und aus demselben Grunde  $B C D = b C d$ . Auf ähnliche Art wurden die Theilstriche durch die Puncte des Bogens  $k$  Fig. 22. zwischen den Bogen  $k, h i$  und  $f g$  gezogen, ver-

\*) Kästners astron. Abhandlungen II Samml. S. 197.



vermittelst eines Halbmessers, der durch eine an den Bogen *k* gezogene und den Bogen *e* schneidende Tangente bestimmt wurde \*).

### §. 26.

Nun komme ich auf die Eintheilung des Vernier, den man Fig. 22 in seiner natürlichen Gröse und bey *E* im Durchschnitt siehet. Der Anfangspunct des Vernier wird durch eine gerade Linie bestimmt, welche man durch den Mittelpunkt des Quadranten mit der Absehenslinie parallel ziehet. (§. 12.) Ich werde in der Folge zeigen, wie man die Axe der Fernröhre den Seitenflächen des Parallelepipeds *KL* Fig. 9 parallel machen kann; alsdann darf man nur mit der Seitenfläche, welche auf der Ebene des Quadranten senkrecht ist, eine Parallele Linie durch den Mittelpunkt der Umdrehungsaxe der Fernrohre, welchen man nach der Methode §. 22 auf der Platte *rs* Fig. 9 bezeichnet hat, ziehen, welche den Anfangspunct *n* Fig. 22 bestimmt. Nun gibt man den Spizen des Stangenzirkels einen so grossen Abstand voneinander als der Halbmesser war, mit welchem die Theilstriche des Bogens *e* Fig. 22 beschrieben wurden, befestigt die Fernröhre auf dem Gradbogen mit einer Schraubzwinge, setzt die eine in den Punct *n* des Vernier, und beschreibet

\*) Da der Gradbogen *AB* Fig. 9 u. 10 mehr als 90 Grade fassen kann, so werden sowohl über den neunzigsten Grad als auch über den Nullpunct hinaus noch einige Grade aufgetragen. Der Gebrauch dieses Theils des Gradbogens wird unten §. 40 u. f. vorkommen.

schreibt mit der andern einen kleinen Bogen, welcher den Bogen  $ab$  scheidet. Hierauf nimmt man funfzehn Theile der Eintheilungen auf,  $ab$ , trägt diesen Bogen von dem oben erwähnten Durchschnittspunct  $a$   $n$  auf den Kreisbogen  $ab$ , und theilt ihn in 16 gleiche Theile,

so wird jeder dieser Theile  $\frac{15}{16}$  von  $\frac{1}{4.96}$

oder  $\frac{1}{384}$  des Quadranten betragen und durch den Vernier jedes  $\frac{1}{28}$  des Quadranten in  $4.16 = 64$  gleiche Theile getheilt werden. Die Theilstriche auf der Vernierplatte werden nun auf dieselbe Art, wie die Theilstriche des Bogens  $cd$  und mit demselben Halbmesser beschrieben. Was die Geschichte und Theorie des Vernier betrifft, so findet man beydes in Herrn Hofrath Kästners astronomischen Abhandlungen, II Samml. S. 142 u. f. S. 180. Der hier gebrauchte Vernier ist von der zweyten Art S. 150 VII. Hätte man ihn nach der ersten Art einrichten wollen, so hätte man 17 Theile des Bogens ( $ab$ ) in 16 gleiche Theile abtheilen, und die Zahlen von der Rechten gegen die Linke auf die Vernierplatte  $no$  schreiben müssen (S. 148, I Samml.).

**Anmerkung.** Wenn man 14 Theile des Gradbogens auf die Vernierplatte trägt und diesen Bogen in 15 gleiche Theile theilt, so theilt der Vernier einen Grad der 96 Theilung in 60 gleiche Theile. Alsdann kann man dieselbe Tafel, vermittelt welcher die Grade der 96 Theilung in gewöhnliche Grade verwandelt werden, auch zur Verwandlung der Unterabtheilungen gebrauchen. 16 Grade der 96 Th. geben 15 gew. Grade; 16 Min. geben 15 Min. Eine Minute gibt  $56'' 15'''$ . Dasselbe würde man erhalten, wenn

wenn 16 Theile des Gradbogens in 15 gleiche auf der Vernierplatte getheilt würden. Allein bey dieser Art den Quadranten einzutheilen geht der Vortheil, welchen man durch die 96 Theilung erhalten will, alle Eintheilungen durch fortgesetztes Halbiren machen zu können, verloren, weil bey der Eintheilung der Vernierplatte die Theilung in 3 und 5 gleiche Theile vorkömmt.

§. 27.

Die Eintheilung des Vernier für den Bogen k wird auf folgende Art gemacht. Man bringt den Anfangspunct n des Vernier n man an einem Theilstrich, der mit einem Theilstrich des Bogens k in *einem* Halbmesser liegt. Da  $\frac{1}{96} = \frac{1}{96}$  so sind folgende Bogen der Eintheilung in Grade und der in 96 Theile einander gleich:

Grade	15 30 45 60 75 90
96 Theile	16 32 48 64 80 96

\*)

Man bezeichnet nun den Anfangspunct t des Vernier tu, welcher auf einen Theilstrich treffen muß, der zu einem auf dem Bogen e gehört. Soll der Vernier Minuten angeben, so muß man 14 Viertelsgrade in 15 gleiche Theile theilen. Um hier die Theilung in 3 und 5 zu vermeiden, suche man einen Bogen von  $3^{\circ}44'$  zu bekommen, so wird man durch Halbirungen die Eintheilung des Vernier machen können; denn jede Abtheilung des Vernier muß 14 Minuten betragen, folglich machen 16 Theile des Vernier  $3^{\circ}44'$ . Um diesen

\*) Kästners astron. Abhandlungen II Samml. S. 211.

sen Bogen zu bekommen, setzte ich die eine Spitze des Stangenzirkels in Punkte des Bogens  $k$ , welche um  $3^{\circ} 30'$  voneinander abstunden, und machte mit der andern Spitze kleine Durchschnitte in dem Bogen  $ab$ , so hätte ich auf  $ab$  zwischen diesen beyden Durchschnitten einen Bogen von  $3^{\circ} 30'$  (§. 25. Fig. 23.). Die Chorde dieses Bogens trug ich auf den Bogen  $k$ , welche daselbst sehr nahe zu  $3^{\circ} 44'$  gehört. Denn da sich die Halbmesser der Bogen  $ab$  und  $k$  wie  $16:15$  verhalten, so läßt sich der Winkel, den man auf dem Bogen  $k$  bekommt, nach §. 24. berechnen. Es ist

$$\begin{array}{r} \text{Lg } 16 = 1,2041200 \\ \text{Lg } \sin (1^{\circ} 45') = 8,4848479 \\ \hline 9,6889679 \\ \text{Lg } 15 = 1,1760913 \\ \hline 8,5128766 \end{array}$$

gehört zu  $1^{\circ} 52' 0'', 14$

Folglich ist dieser Bogen nur um  $0'', 28$  zu groß. Beschreibt man nun aus den Endpunkten dieses Bogens mit einerley Halbmesser Kreisbogen durch den Bogen  $e$ , so hat man auch auf  $e$  einen Bogen von  $3^{\circ} 44'$ . Dieser wird durch Halbirungen in 16 gleiche Theile getheilt, wodurch die Punkte bestimmt werden, aus welchen man mit demselben Halbmesser, mit welchem die Theilstriche des Bogens  $k$  gezogen wurden, die Theilstriche auf dem Vernier  $tu$  zieht, nachdem man die Vernierplatte in eine solche Lage gegen jene Punkte gebracht hat, daß der aus dem ersten

C

Theil-

Theilungspunct gezogene Bogen auf den Anfangspunct  $t$  des Vernier trifft.

§. 28.

Sollen die Anfangspuncte der Abtheilungen auf den Bogen  $e$  und  $k$  oder der Eintheilungen in 96 und 90 auf *einen* Halbmesser fallen, so muß man den Anfangspunct  $e$  Fig. 19 nicht durch den Anfangspunct  $a$  bestimmen, weil letztere Puncte nur dazu dienen, die Theilstriche auf den Bogen  $tv$  zu ziehen, sondern durch den ersten Theilstrich auf dem Bogen  $tv$ . Daher kann man erst alsdann mit der Eintheilung des Bogens  $e$  den Anfang machen, wenn man die Theilstriche auf  $tv$  schon gezogen hat. Uebrigens ist diese Uebereinstimmung nicht nothwendig, wenn man den Anfangspunct des Vernier  $tu$  nach §. 27. bestimmt; die Anfangspuncte des Vernier und der beyden Gradbogen stünden alsdann um gleiche Winkel von einander ab. Die Puncte auf den messingenen Cylindern  $\alpha \beta$  Fig. 19 müssen in einer mit dem Halbmesser durch den 90ten Grad  $k$  Fig. 22 oder den 96  $e$  parallel gezogenen Linie liegen. Dieses läßt sich am leichtesten so bewerkstelligen. Man stellt den Quadranten vertical auf, so daß ein aus dem Mittelpunkt  $C$  herabhängender Bleyfaden auf den 90sten Grad trifft. Nun hängt man das Loth auf die Schraube  $\gamma$ , und bringt den Faden genau auf den Punct auf dem Cylinder  $\beta$ , so bezeichnet der Faden bey  $\alpha$  die Stelle des unterm Cylinders. Diesen setzt man aber etwas außerhalb der

Ver-

Verticallinie  $\beta\alpha$ , so daß der Punct  $\alpha$  nicht auf den Mittelpunkt seiner Grundfläche sondern excentrisch fällt. Hat man also diesen Punct nicht genau getroffen, so kann man ihn durch Umdrehung des Cylinders um seine Axe in die gehörige Lage bringen, weil hier auf den Abstand beyder Puncte  $\alpha$  und  $\beta$  von einander nichts ankommt. Uebrigens ist zu bemerken, daß man den Fehler, welcher aus der schiefen Lage der Linien Cd und  $\beta\alpha$  (Fig. 19) gegeneinander bey den Höhenmessen entstehen kann, zugleich mit dem, welcher von der schiefen Lage der Absehslinie gegen den an den Anfangspunct des Vernier gezogenen Halbmesser entsteht, leicht entdecken und bey dem Höhenmessen in Rechnung bringen kann, wie nun bald wird gezeigt werden.

### *Berichtigung des Quadranten.*

#### §. 29.

Aus der allgemeinen Beschreibung des Quadranten (§. 11. 12. und 13.) erhellet, daß zu genauen Höhenmessungen folgendes erfordert werde.

- 1) Der Gradbogen muß in *einer* Ebene liegen.
- 2) Die Alhidade muß sich um den Mittelpunkt drehen, aus welchem die Bogen für die Eintheilungen beschrieben sind.
- 3) Die Abtheilungen selbst müssen richtig seyn.



- 4) Die Absehungslinie muß mit der Ebene des Quadranten und mit dem aus dem Mittelpunkt des Quadranten an den Anfangspunct des Vernier gezogenen Halbmesser parallel seyn.
- 5) Der Halbmesser für den 90sten Grad muß mit der Linie, welche die beyden Puncte mit einander verbindet, über welche der Bleyfaden herabhängt, parallel seyn.
- 6) Die Ebene des Quadranten muß vertical stehen.
- 7) Die Axe, um welche sich der Quadrant nach dem Azimuth herum bewegt, muß vertical stehen, wenn der Quadrant, einmal in eine Verticalebene gebracht, beständig vertical stehen soll, indem man ihn in eine andere Verticalebene bringt.

Nun muß man untersuchen, ob der Quadrant diese Eigenschaften habe, die Fehler, welche man bey dieser Untersuchung entdekt, verbessern oder genau bestimmen, um sie bey den Beobachtungen in Rechnung bringen zu können. Man heißt dieses den Quadranten *berichtigen*.

### §. 30.

Wie man die Ebene des Gradbogens prüft, habe ich oben (§. 18.) gezeigt. Diese Berichtigung läßt sich vermittelst einer Libelle (Niveau à bulle d'air) bequemer und genauer als mit der Sezwage bewerkstelligen, und geschieht auf dieselbige Art. Doch glaube ich, daß zu dieser Berichtigung eine Sezwage mit einem



nem feinen Faden, der auf einen feinen in einem Stift von Messing gemachten Punct fallen muß, hinlänglich genau ist. Um diesen Punct in seine gehörige Lage zu bringen, bediene ich mich ebenfalls der (§. 28.) beschriebenen Methode, nach welcher ich den Punct auf dem Cylinder *a* Fig. 19 in seine gehörige Lage brachte. Ich setze die Sezwage auf die Linie auf, die ich in eine horizontale Lage bringen will, erhöhe oder erniedrige sie, bis der Bleyfaden auf seinen Punct trifft. Nun wende ich die Sezwage um; stehet der Bleyfaden richtig auf seinem Punct, so liegt die Linie horizontal, und die Sezwage ist zugleich richtig. Wo nicht, so bringt man durch Umdrehung des messingenen Stifts oder Cylinders, den Punct, welcher excentrisch darauf gemacht ist, um die Hälfte seines Abstands von dem Bleyfaden demselben näher, die andere Hälfte verbessert man vermittelst Erhöhung oder Erniedrigung der Linie, welche man horizontal stellen will. Man wiederholt nun dieselbige Operation so lange, bis der Faden bey dem Umwenden der Sezwage auf seinem Punct bleibt \*).

### §. 31.

Wenn man die in dem 22. §. beschriebene Methode den Mittelpunkt des Quadranten zu bestimmen genau befolgt, so kann man die 2te Bedingung (§. 29.) erfüllen. Man muß aber allen Fleiß darauf verwenden, den Fehler

\* Kästners Markscheidekunst, S. 40. n. 24.

ler, welcher aus der Excentricität des Quadranten entsteht, zu vermeiden, weil er leicht sehr beträchtliche Fehler in dem Winkelmessen hervorbringen und nicht leicht so bestimmt werden kann, daß man bey jeder Beobachtung ihn in Rechnung bringen könnte. Wie man ihn berechnen könnte, wenn man die dazu erforderlichen Bestimmungsstücke hätte, und diese vielleicht könnten gefunden werden, wird folgende Untersuchung lehren. Es seye in Fig. 24 c der Mittelpunkt des Bogens o m, C der Punct, um welchen sich die Alhidade dreht. o der Anfangspunct der Grade. Man habe bey Messung eines Winkels die Alhidade aus der Lage Co in die Lage Cm gebracht, so ist der wahre Winkel o Cm. Allein die Alhidade gibt auf dem Gradbogen den Winkel o c m an, weil o m das Mas des Winkels o c m ist. Nun ist c d C äußerer Winkel der Dreycke c d m und C d o. Folglich ist

$$cdC = coC + oCm = cmC + ocm$$

$$\text{also } oCm = ocm + cmC - coC$$

In dem Dreyek coC verhält

$$cC : \sin coC = co : \sin cCo$$

und in dem Dreyek Cmc

$$cC : \sin cmC = co : \sin cCm \\ = co : \sin (cCo - oCm)$$

Weil die Winkel coC und cmC klein sind, so kann man statt der sinus die Bogen selbst

setzen. Heißt nun  $\frac{Cc}{co}$  oder die Excentricität e in Theilen des Halbmessers, der Winkel cCo  $\psi$ , der Winkel o c m  $\alpha$  und der Winkel oCm  $x$ , so hat man

$$x =$$

$x = \alpha + e \sin(\psi - \alpha) - e \sin \psi$   
 oder ohne merklichen Fehler, weil  $x$  und  
 $\alpha$  wenig von einander verschieden sind

$x = \alpha + e \sin(\psi - \alpha) - e \sin \psi$   
 folglich wenn  $y$  die Verbesserung des ge-  
 messenen Winkels ist

$$y = e \sin(\psi - \alpha) - e \sin \psi$$

Da nur der erste Theil des Werths von  $y$  ver-  
 änderlich ist, so wird  $y$  am größten, wenn  
 $\psi - \alpha = -90^\circ$  oder  $\alpha = 90^\circ + \psi$  wird, als-  
 dann ist  $y = -e(1 + \sin \psi)$ , nimmt man  
 nun auch  $\psi$  veränderlich, so ist der größte  
 Fehler, welchen die Excentricität verursa-  
 chen kann,  $= 2e$ . Bey Quadranten kann  $\alpha$   
 nicht viel über  $90^\circ$  betragen, für diese ist al-  
 so der größte Fehler der Excentricität  $= e$  oder  
 in Secunden  $= 206265.e$ , weil der Bogen,  
 welcher dem Halbmesser gleich ist 206265 Se-  
 cunden enthält. Wenn also  $e$  nur  $\frac{1}{20000}$  des  
 Halbmessers beträgt, ist der Fehler welcher  
 bey dem Winkelmessen entstehen kann, schon  
 10,3 Secunden.

### §. 32.

Wenn man für zwey Punkte eines Win-  
 kelmessers die von der Excentricität herrüh-  
 rende Fehler kennt, so kann man daraus so-  
 wohl die Excentricität  $e$  als auch den Winkel  
 $\psi$  bestimmen, welchen eine durch den Mittel-  
 punct des Gradbogens und den Umdrehungs-  
 punct der Alhidade gezogene gerade Linie mit  
 dem an den Nullpunct des Gradbogens gezo-  
 genen Halbmesser einschließt. Es seyen

nehmlich die bekannten Fehler  $m$  und  $n$ , die dazu gehörigen Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ , so hat man man folgende zwey Gleichungen (§. 31.).

$$m = e \sin(\psi - \alpha) - e \sin \psi$$

$$n = e \sin(\psi - \beta) - e \sin \psi$$

$$\text{also } e = \frac{m}{\sin(\psi - \alpha) - \sin \psi} = \frac{n}{\sin(\psi - \beta) - \sin \psi}$$

daher

$$(m(1 - \cos \beta) - n(1 - \cos \alpha)) \text{Tang } \psi = m \sin \beta - n \sin \alpha$$

oder

$$2(m \sin \frac{1}{2} \beta^2 - n \sin \frac{1}{2} \alpha^2) \text{Tang } \psi = m \sin \beta - n \sin \alpha$$

$$\text{und } \text{Tang } \psi = \frac{m \sin \beta - n \sin \alpha}{2(m \sin \frac{1}{2} \beta^2 - n \sin \frac{1}{2} \alpha^2)}$$

hieraus läßt sich  $\psi$  finden; folglich auch  $e$  aus der Formel

$$e = \frac{m}{\sin(\psi - \alpha) - \sin \psi}$$

Ob sich die Alhidade um einen andern Punct als um den Mittelpunct des Gradbogens drehe, kann man finden, wenn man untersucht, ob die Vernierplatte immer gleichweit von den auf dem Quadranten gezogenen Kreisbogen absteht. Wenn man diese Abstände mißt, so läßt sich aus ihrem Unterschied die Excentricität auf folgende Art berechnen,

$$\text{In dem Dreyek } cCm \text{ ist } (cm)^2 = (Cm)^2 + (Cc)^2 + 2Cc \cdot Cm \cos cCm$$

$$\text{also } (cm)^2 - (Cm)^2 = Cc(Cc + 2Cm \cos cCm)$$

$$\text{und } cm - Cm = \frac{Cc(Cc + 2Cm \cos cCm)}{cm + Cm}$$

$$\text{nun ist } cCm = cCo - oCm \text{ oder beynahe} \\ = cCo - ocm = \psi - \alpha, cm \text{ beynahe} = Cm. \\ \text{folg-}$$

$$\text{folglich } cm - Cm = \frac{e(e + 2 \cos(\psi - \alpha)) \cdot Cm}{2}$$

$$\text{oder } \frac{cm - Cm}{Cm} = \frac{e}{2} (e + 1 \cos(\psi - \alpha))$$

Nun seyen drey gemessene Abstände der Vernierplatte in Theilen des Halbmessers ausgedrückt  $a, b$  und  $c$ , die dazu gehörigen Bogen  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$ , so hat man die zwey Gleichungen

$$\text{I. } a - b = \frac{e}{2} (e + 2 \cos(\psi - \alpha))$$

$$- \frac{e}{2} (e + 2 \cos(\psi - \beta))$$

$$= e \cos(\psi - \alpha) - e \cos(\psi - \beta)$$

$$\text{II. } a - c = e \cos(\psi - \alpha) - e \cos(\psi - \gamma)$$

und hieraus tang  $\psi$

$$= \frac{(a - b) \cos \gamma - (a - c) \cos \beta + (b - c) \cos \alpha,}{(a - c) \sin \beta - (a - b) \sin \gamma - (b - c) \sin \alpha}$$

und endlich  $e$  wenn man den Werth von  $\psi$  in die Formel I oder II setzt.

### §. 33.

Was die Prüfung der Abtheilungen betrifft, so muß man mit der Untersuchung des Bogens von 90 Graden den Anfang machen, und alsdann nach und nach immer zu den kleinern Bogen übergehen. Wenn man den Quadranten vertical aufstellt, so kann man vermittelst eines über den Mittelpunkt des Quadranten herabhängenden Loths den Halbmesser des neunzigsten Grades vertical stellen; alsdann muß der Halbmesser an dem Nullpunct horizontal seyn. Hätte man nun ein Mittel die

horizontale Lage dieses Halbmessers zu untersuchen, so könnte man den Bogen von neunzig Graden prüfen. Dieses wird man auf folgende Art bewerkstelligen können. A B C D Fig. 25 Taf. IV ist ein hölzernes Kreuz. Auf dem verticalen Theil cD sind zwey Cylinder e und f von Messing mit feinen Puncten, über welche der Bleyfaden ep herabhängt. Auf dem untern Cylinder f ist der Punct excentrisch, damit man ihn durch Umdrehung des Cylinders etwas verrücken kann. Bey g und h sind zwey Oefnungen, deren Mittelpuncte so weit voneinander abstehen, als der Mittelpunct des Quadranten von dem Nullpunct des Gradbogens. In jeder Oefnung ist ein feiner Faden horizontal ausgespannt. Vermittelst der Platten i k l m, davon man zwey bey E im Profil siehet, kann man das Kreuz an den Halbmesser F Fig. 19 des Quadranten anschieben, und durch Umdrehung der Schrauben n o so stellen, daß die Fäden gh genau auf den Mittelpunct und auf den Nullpunct treffen. Man stellt den Halbmesser des neunzigsten Grades vertical, und stellt den Punct f so, daß der Bleyfaden ep genau über die Puncte e und f herabhängt. Wäre man nun versichert, daß die gerade Linie durch e und f die durch g und h rechtwinklicht durchschneidet, so wäre der Bogen von  $90^\circ$  richtig. Dieses kann man aber finden, wenn man das Kreuz umkehrt, und den Faden g nach F, den h nach A bringt, den Bleyfaden bey d befestigt und über f herabhängen läßt. Trift der Bleyfaden wieder auf den Punct e, so ist der Bo-

Bogen von  $90^\circ$  richtig, wo nicht, so ist die Abweichung des Perpendikels von der geraden Linie durch e und f dem gedoppelten Fehler des Bogens von  $90^\circ$  gleich.

### §. 34.

Nun untersucht man den Bogen von 60 Graden, indem man mit dem Stangenzirkel den Halbmesser des Bogens nimmt, und ihn mit seiner Chorde vergleicht. Man untersucht ebenfalls, ob die Bogen von  $0-15$ ,  $15-30$ ,  $30-45$ , u. s. w. einander gleich sind, indem man mit dem Stangenzirkel den Abstand des Anfangspuncts von dem 15ten Grad oder die Chorde von 15 Graden faßt, und sie auf die übrige Bogen trägt. Der Vernier dient ebenfalls zu der Untersuchung der Eintheilungen. Denn der Bogen des Vernier muß beständig 14 Theile auf dem in gewöhnliche Grade eingetheilten Bogen und 15 Theile auf dem Bogen der 96 Theilung fassen. Mehrere Methoden, die Fehler der Eintheilungen zu entdecken und zu bestimmen, werden unten bey der Anleitung zu dem Gebrauch des Quadranten vorkommen. Andere Methoden muß ich hier übergehen, weil der dazu erforderliche Apparat kostbarer ist als der Quadrant selbst den ich hier beschrieben habe.

### §. 35.

Um die Absehenslinie der Ebene des Quadranten dem aus seinem Mittelpunct an den Anfangspunct des Vernier gezogenen Halb-



Halbmesser parallel zu machen, verfährt man auf folgende Art. Man nimmt die Fernröhre von dem Quadranten ab, und legt sie auf ein Brett, das nicht länger seyn darf, als der Abstand der nächsten Ränder der Platten  $rs$  und  $tu$  Fig. 9 Taf. III., damit man die Fernröhre auf jede ihrer Seitenflächen auflegen kann. Man bringt dieses Brett sammt der Fernröhre in eine solche Lage, daß ein kenntlicher Punct eines entfernten Gegenstandes von dem Fadenkreuz getroffen wird, und stellt die Ocularröhre  $\omega$  so, daß man die Fäden deutlich siehet. Sieht man zugleich mit den Fäden den entfernten Gegenstand nicht deutlich, so muß das Fadenkreuz durch Verschiebung der Röhre  $V$  Fig. 14 dem Objectivglas näher gebracht oder davon hinweggerückt werden, denn in diesem Fall befindet sich das Fadenkreuz nicht an der Stelle des Bilds, welches das Objectivglas von dem entfernten Gegenstand macht. Wenn man da das Auge auf die Seite bewegt, so erscheint der Durchschnitt der Fäden an einem andern Gegenstand, und der Gegenstand selbst, der vorher von dem Fadenkreuz bedeckt wurde, scheint sich zu bewegen, und zwar nach einer Seite, die der Seite nach welchem das Auge geht entgegengesetzt ist, wenn sich der Durchschnitt des Fadenkreuzes näher bey dem Objectiv befindet als desselben Brennpunct; aber nach einerley Seite mit dem Auge, wenn der Durchschnitt von dem Objectiv weiter entfernt ist, als desselben Brennpunct

punct \*). Dieses dient zu unterscheiden, nach welcher Seite man das Fadenkreuz bewegen muß. Da man wegen der kleinen Oefnung der Röhre W bey A das Auge nicht so weit aus des Fernrohrs Axe bringen kann, das man sicher unterscheiden könnte, ob das Bild des Gegenstandes und der Durchschnitt der Kreuzfäden ihre Lage gegeneinander ändern; so nahm Herr Hofrath Kästner das Ocular mit dem ihm eignen Behältnisse weg, und brauchte statt desselben ein breites erhabenes Glas \*\*). Ich habe bey meiner Fernröhre eine solche Einrichtung gemacht, daß man das Stük A, welches die Augenöffnung hat, ganz aus der Röhre W herausnehmen kann. Man macht nun an die Röhre v Fig. 14 ein Zeichen, um sie, wenn sie verrückt wird, jedesmal wieder in ihre gehörige Lage bringen zu können.

### §. 36.

Man dreht nun die Röhre v so um ihre Axe, daß der eine Faden der Ebene des Bretts parallel, folglich der andere vertical darauf wird, welches man daran erkennen kann, wenn man durch Bewegung der Fernröhre in der Ebene des Bretts den Punct des entfernten Gegenstands an andere Stellen des Parallelfadens bringt. Man legt die Fernröhre auf die entgegenstehende Seitenfläche und bringt erwähnten Punct wieder in das Sehfeld. Trift der horizontale oder der Ebene des Bretts parallel

\*) Kästners astron. Abhandl. II. Samml. S. 244. u. f.

\*\*) Astr. Abhandlungen, II. Samml. S. 247. u. f.

rallele Faden wieder den vorigen Punct, so ist von dieser Seite keine Veränderung vorzunehmen, wo nicht, so bewege man das Objectiv mittelst der Schrauben *a b c d* Fig. 13 Taf. III aufwärts, wenn der Punct unter dem Horizontalfaden, niederwärts, wenn er über demselben liegt, bis man ihn in die Mitte zwischen seiner anfänglichen Lage und den Faden gebracht hat, die andere Hälfte verbessere man durch Erhöhung oder Erniedrigung des Bretts, und bringe den Horizontalfaden wieder auf seinen Punct. Hat man dieses gut getroffen, so wird der Faden wieder auf den Punct treffen, wenn man die Fernröhre in ihre erste Lage bringt. Findet sich dieses nicht, so muß man die Lage des Objectivs und des Bretts noch ein wenig ändern, bis in beyden Lagen der Fernröhre der Faden auf denselben Punct fällt. Ebenso verfähre man mit den beyden andern Seiten, so wird die Absehenslinie den Seitenflächen der Fernröhre parallel. Diese Art die Absehenslinie zu berichtigen kommt mit der Berichtigung der *Probierfernrohre* (*lunette d'épreuve*) überein. Smiths Lehrbegriff der Optic. III. B. 4. Cap. Ia Lande Astronomie, troisieme édition. 2503. Nun sind die Platten *rs* und *tu* Fig. 9 gleich dik, folglich ist die Absehenslinie der Ebene des Quadranten parallel. Wollte man auch noch untersuchen, ob diese Platten gleich dik sind, so dürfte man nur die Fernröhre an dem Quadranten anbringen, den Verticalfaden nach einem Gegenstand richten, und hierauf den Quadranten mittelst der Schrauben *T* und *γ* fest

fest stellen. Wird nun die Fernröhre abgenommen und die gegenüberstehende Seite KL auf die Ebene des Quadranten gebracht, so muß, wenn man die Fernröhre in eine solche Neigung bringt, daß man den Gegenstand wieder siehet, der Verticalfaden auf denselben Punct treffen. Die Linie von dem Mittelpunkt des Quadranten an den Anfangspunct des Vernier hat man einer Seitenfläche parallel gemacht (§. 26.) folglich ist der an den Anfangspunct des Vernier gezogene Halbmesser auch der Absehenslinie parallel.

### §. 37.

Um die Umdrehungsaxe MN des Quadranten vertical zu stellen (*caler le quart-de-cercle*) verfährt man so. Man nimmt die Vorrichtung TU weg, damit man den Quadranten ganz um seine Axe MN umdrehen kann, und bringt seine Ebene in die Richtung der Schrauben ce oder der Ebene des Fensters parallel. Man stellt die Fernröhre mittelst der Schraubzwinge po und des Keils \* auf den Nullpunct, und setzt darauf eine Libelle oder Wasserwage, deren Luftblase man durch Erhebung oder Erniedrigung der Fernröhre mittelst des Keils \* genau zwischen ihre Zeichen bringt \*). Man gibt dem Quadranten eine halbe Umdrehung um seine Axe, und siehet  
nun

\*) Man hat dergleichen Libellen, an welchen zwey längst der Röhre hin bewegliche Zeiger angebracht sind, welche dazu dienen, die Stelle der Luftblase zu bezeichnen.

nun wieder nach der Luftblase. Hat diese ihre Stelle nicht verändert, so ist die Umdrehungsaxe senkrecht auf die Durchschnittslinie der Ebene, in welcher der Quadrant steht, mit der Ebene des Horizonts. Hat sich aber die Luftblase von ihrer Stelle wegbewegt, so verbessert man die Hälfte des Fehlers durch Erhöhung oder Erniedrigung der Fernröhre, die andere Hälfte durch Verschiebung des Würfels fg indem man diejenige der beyden Schrauben c und e zurückschraubt, welche auf der Seite liegt, nach welcher die Luftblase sich bewegen soll, und mit der entgegengesetzten so lange nachschraubt, bis die Luftblase zwischen ihren Zeichen steht. Bringt man den Quadranten wieder in seine erste Lage, so muß die Luftblase auch wieder an ihre vorige Stelle kommen, wenn die Berichtigung gut gemacht ist; im entgegengesetzten Fall muß man das ganze Verfahren wiederholen. Eben so berichtigt man die Axe MN nach einer auf der ersten senkrechten Richtung mittelst der Schrauben d und h Fig. 9 und 15. Ist dieses geschehen, so wird die Luftblase ihre Stelle nicht verlassen, wenn man den Quadranten um seine Axe dreht, kleine Veränderungen ausgenommen, welche aus der Verbindung der Schwere mit der durch die Bewegung des Quadranten um seine Axe hervorgebrachten Schwungkraft entstehen, aber sogleich wegfallen, wenn der Quadrant in Ruhe kommt.

## §. 38.

Nun hängt man den Bleyfaden CP an, der aus feinem Silberdrat und einer angehängten durchlöcherten Büchse P besteht. in welche man Schrot oder Hagel von Bley bringen kann. Man hängt dieses Gewicht in ein Glas mit Wasser  $\odot \alpha \beta$ , welches von dem Träger  $\gamma \delta$  getragen wird, den man mittelst der Schraube  $\theta$  bey  $\pi$  Fig. 10 anschraubt. Wenn man diesen Faden über den messingenen Zapfen oben bey C herunterhängen läßt, so muß er den untern kaum berühren; wenn dieses nicht geschieht, kann man nach Beschaffenheit der Umstände bey k oder l Fig. 9 und 10 einen sehr platten Keil von Holz zwischen die Säule MN und das Stük FG bringen, nachdem man die Schraube k oder l etwas losgemacht hat, und sie hierauf wieder anziehen. Alsdann bringt man den Bleyfaden mittelst der Schraube bc Fig. 17,  $\gamma$  Fig. 19, und durch Bewegung des Quadranten um die Schraube kk Fig. 9 und 10 mittelst der Schrauben qq Fig. 9 10 und 19 genau auf die Punkte der Cylinder  $\alpha$  und  $\beta$ , so ist die Linie  $\alpha \beta$  mit der Umdrehungsaxe des Quadranten MN parallel, weil beyde vertical sind, und der Bleyfaden wird immer auf seine Punkte treffen, wenn man den Quadranten in verschiedene Verticalebenen bringt. Man sieht leicht, daß man die Axe MN ebenso, wie §. 37. gezeigt wurde, auch mittelst des Bleyfadens vertical stellen könnte, nur ist die Berichtigung mittelst des Bleyfadens etwas beschwerlicher, weil er bey dem Umdrehen des Quadranten um seine

D

Axe



Axe sich öfters an den Cylinder  $\alpha$  anlegt oder sich zu weit davon entfernt, wenn die Umdrehungsaxe MN der Ebene des Quadranten noch nicht parallel ist, und man daher genöthigt ist, 2 Fehlern zugleich abzuheben. Wer sich aber die §. 37. beschriebene Methode gut bekannt gemacht hat, wird vermittelst des Bleyfadens die Umdrehungsaxe leicht berichtigen können.

### §. 39.

Da nun die Absehenslinie der Fernröhre mit den Seitenflächen derselben und dem an den Anfangspunct des Vernier gezogenen Halbmesser parallel ist, die Linie  $\alpha\beta$  Fig. 19 vertical und senkrecht auf den Halbmesser an den Nullpunct des Quadranten, so muß die auf der Ebene des Quadranten senkrechte Seitenfläche der Fernröhre horizontal seyn, wenn man den Nullpunct des Vernier auf 0 stellt. Die horizontale Lage dieser Seitenfläche kann man vermittelst einer Libelle untersuchen. Man setzt dieselbige oben auf die Seitenfläche der Fernröhre, und bemerkt die Stelle, welche die Luftblase einnimmt, wendet hierauf die Libelle um, und siehet nach, ob die Luftblase noch an ihrer ersten Stelle sich befindet, in welchem Fall die Fläche horizontal ist. Steht aber die Luftblase an einem andern Ort, so muß man die Hälfte entweder durch Correctionsschrauben an der Libelle oder durch Verschiebung der Zeichen, welche die Stelle der Luftblase angeben, die andere durch Erhöhung oder Erniedrigung der



der Fernröhre verbessern. Ist man von dem Parallelismus der Absehenslinie und der Seitenflächen der Fernröhre versichert, so kann man auf diese Art die Absehenslinie horizontal stellen, die Höhe, welche alsdann der Vernier angibt, ist der *Collimationsfehler* des Quadranten; gibt er statt der Höhe Tiefe unter dem Horizont an, so muß dieses zu allen beobachteten Höhen hinzugethan werden, im ersten Fall wird der Collimationsfehler abgezogen. Man sieht leicht, daß man nur alsdann durch das Verfahren §. 36. die Absehenslinie der Fernröhre mit ihren Seitenflächen parallel machen könne, wenn die Röhre KL wirklich ein Parallelepipedum ist. Man kann vermittlest einer Libelle auf folgende Art den Parallelismus der Seitenflächen prüfen. Man legt die Fernröhre auf ein Brett, und macht ihre obere Seitenfläche vermittlest der Libelle, durch Erhöhung oder Erniedrigung des Bretts auf der einen Seite, horizontal, wendet nun die Fernröhre um, so daß das Objectiv dahin gekehrt wird, wo vorher das Ocular war, und untersucht, ob die obere Seitenfläche noch horizontal ist; findet sich dieses, so ist die obere Seitenfläche mit derjenigen auf welcher die Fernröhre liegt parallel, wo nicht, so macht alsdann die obere Seitenfläche mit der Ebene des Horizonts einen Winkel  $x$ , der zweymal so groß ist, als der Neigungswinkel der beyden einander gegenüberstehenden Seitenflächen. Nun wird durch die Berichtigung §. 46. die Absehenslinie in eine solche Lage gebracht, daß ihre

Winkel mit zwey einander gegenüberstehenden Seitenflächen gleich sind, folglich ist der Winkel der Absehenslinie mit einer jener Seitenflächen der vierte Theil des Winkels  $\alpha$ .

§. 40.

Den Collimationsfehler des Quadranten kann man noch sicherer auf folgende Art bestimmen. Man messe mit dem Quadranten die Höhe eines entfernten nahe am Horizont befindlichen Gegenstandes E Fig. 26 Taf. IV. Hierauf kehre man den Quadranten um, (welches leicht geschehen kann, wenn man die Schraube h Fig. 9 zurückschraubt, den Quadranten sammt der Säule MN herausnimmt, und den Theil der Säule M nun nach ~~h~~ bringt,) und bringe ihn so wohl in die Verticalebene des Gegenstands E als auch vermittelst des Bleyfadens in seine gehörige verticale Lage. Man messe wieder die Höhe des Gegenstands E, welche der Vernier auf der andern Seite des Nullpuncts in e angeben wird. Zieht man durch den Mittelpunkt des Quadranten c die gerade Linie ef mit CE parallel, so hat man  $Ccf = cCE$ , folglich wenn o G auf Cc oder die Verticallinie senkrecht gezogen wird  $oCD = ocf = ocd$ , wenn d die Stelle bezeichnet, auf welcher der Anfangspunct oder Index des Vernier bey der ersten Lage des Quadranten lag. Der Winkel fce ist dem Winkel EcF oder CEc gleich. Dieser läßt sich leicht berechnen, wenn man den Abstand des Puncts E und Cc weiß. Da man den Punct E nahe am Horizont und in der Ferne nimmt, so sind die Winkel ECc und CcE wenig von  $90^\circ$  ver-

verschieden, daher  $\text{CEc} = \frac{\text{Cc}}{\text{CE}} - 206265$  Se-

cunden \*). Zieht man diesen Winkel von dem Winkel  $\text{oce}$  ab, so bleibt der Winkel  $\text{ocf}$  übrig. Findet sich dieser eben so groß als der Winkel  $\text{ocd}$  oder  $\text{oCD}$ , so ist der Collimationsfehler  $= 0$ ; Ist  $\text{ocd} > \text{ocf}$ , so ist der halbe Unterschied beyder Winkel dem Collimationsfehler gleich, welcher von den Höhen abgezogen werden muß. Findet sich  $\text{ocd} < \text{ocf}$ , so muß man den halben Unterschied addiren.

Wenn die Entfernung des Gegenstands größer ist als  $206265 \cdot \text{Cc}$ ; so beträgt der Winkel  $\text{CEc}$  weniger als eine Secunde. Da liegt also der *wahre* Anfangspunct in der Mitte zwischen den Puncten  $d$  und  $e$ . Auch kann man sich die Berechnung des Winkels  $\text{CEc}$  ersparen, wenn man den Mittelpunkt des Quadranten immer in einerley Höhe erhält oder in einer verticalen Linie zwey Zeichen  $E$  und  $F$  in der Entfernung  $\text{Cc}$  voneinander anbringt, und die Höhe des ersten in der gewöhnlichen Lage des Quadranten, die Höhe von  $F$  mit umgekehrten Quadranten beobachtet.

#### §. 41.

Bey dem hier beschriebenen Quadranten ist  $\text{Cc} = 20$  Zollen  $= 1\frac{2}{3}$  Fuß; wenn man also ohne einen Fehler von einer Secunde zu begehen, die Linien  $\text{CE}$ ,  $\text{cE}$  als parallel solle anse-

\*) Kästners astron. Abhandl. II Samml. S. 59. u. f.

ansehen können, so müßte CE größer seyn als  $\frac{5.206265}{3}$  oder als 343775 Fuß, das ist

> 15 geogr. Meilen. Man wird also nicht wohl einen so weit entfernten Gegenstand nehmen können, daß man die Linien CE und cE als parallel ansehen kann. Ich gebrauchte zu der Berichtigung zwey in einer Verticallinie übereinander angebrachte Zeichen E und F, deren Abstand von einander = C c = 20 Zollen war. Die Höhe des Zeichens E fand ich =  $0^{\circ} 52' 30''$  und nach der 96 Theilung =  $0 \ 3 \ 11,5$  welches  $0^{\circ} 52' 17'',7$  beträgt. Nach der Umkehrung fand ich auf der andern Seite des Nullpuncts die Höhe von F =  $0^{\circ} 5' 30''$  und nach der 96 Theilung =  $0 \ 06,7 = 0^{\circ} 5' 53'',3$  \*\*). Folglich ist der Collimationsfehler

$$= \frac{0^{\circ} 52' 30'' - 0^{\circ} 5' 30''}{2} = 23' 30'' \text{ und}$$

$$= \frac{0^{\circ} 52' 17'',7 - 0^{\circ} 5' 53'',3}{2} = 23' 12'',2 \text{ aus}$$

der 96 Theilung, welcher von den beobachteten Höhen abgezogen werden muß.

Bey einem andern Versuch fand ich die Höhe des Puncts E =  $45' 0'',0$ ; nach der 96 Theilung =  $3 \ 3,0 = 0^{\circ} 44' 49'',4$ . Mit umgekehrtem Quadranten die Höhe von F =  $2' 0''$ ; nach

\*) Wenn man Winkel auf der andern Seite des Nullpuncts nimmt, so muß man die Minuten von dem Ende des Vernier an zählen, weil auch die Grade nach der andern Seite hin gelesen werden. Der Index des Vernier aber gibt in beyden Fällen die Viertelgrade.

nach der 96 Theilung =  $0\ 0\ 2,0 = 0^{\circ}\ 1' 45'',4$   
 beyde noch auf *derselben Seite des Null-*  
*puncts*. Hier wird also der Collimationsfehler

$$= \frac{45' 0'' + 2' 0''}{2} = 23' 30'' \text{ und}$$

$$= \frac{44' 49'',4 + 1' 45'',4}{2} = 23' 17'',4. \text{ Es gab}$$

also die 90 Theilung die Höhen um  $15''$  im Mittel gröser an als die 96 Theilung. Die Ursache, warum dieser Quadrant die Höhen um so viel zu gros angab, rührt daher, weil ich den Anfangspunct des Vernier nicht nach §. 26. bestimmte, sondern ihn willkührlich annahm. Man siehet leicht, daß dieses keinen Einfluß auf Genauigkeit der Beobachtungen hat. Man heist diese Art den Quadranten zu berichtigen die Berichtigung durch *Umkehrung* (renversement).

#### §. 42.

Eine andere Art den Collimationsfehler zu bestimmen ist die Berichtigung durch *Umwendung* (retournement). Man gebraucht dazu Sterne deren Abstand vom Zenith nicht gröser seyn darf, als der Bogen, der auf dem Quadranten noch über den neunzigsten Grad hinaus gegen B hin liegt. Eines solchen Sterns Abstand vom Zenith wird mit dem Quadranten so genommen, daß der eingetheilte Rand bey der einen Beobachtung gegen Morgen, bey der andern gegen Abend gekehrt wird Fig. 27 Taf. IV. Der Bogen *ed* ist des Sterns gedoppelter Abstand vom Zenith;

nith; folglich muß der neunzigste Grad zwischen den Puncten e und d in der Mitte liegen. Wenn die Fernröhre die Lage CD gegen den Gradbogen hat, so gibt der Vernier die Höhe an, woraus man die Zenithdistanz findet. Auf der andern Seite des Nullpuncts findet man geradezu Abstand vom Zenith. Sind die Zenithdistanzen auf beyden Seiten gleich, so gibt der Quadrant dieselben und folglich auch die Höhen richtig an. Sind sie ungleich, so ist ihr halber Unterschied der Collimationsfehler des Quadranten, welcher zu den beobachteten Höhen hinzugethan oder davon abgezogen werden muß, je nachdem man den Bogen go D größer oder kleiner als den go e findet. Wenn man nun den Collimationsfehler durch Umkehrung und durch Umwendung bestimmt, und dadurch sowohl den Nullpunct als auch den neunzigsten Grad berichtigt hat, so hat man zugleich eine Probe für den Bogen von 90 Graden. Denn wenn dieser genau 90 Grade hält, so muß der durch Umkehrung gefundene Collimationsfehler dem durch Umwendung gefundenen gleich seyn \*).

### §. 43.

Ehe man den Quadranten gebraucht, muß man noch folgende Theile untersuchen. Der  
Zapfen

\*) Wenn die Fäden in dem Brennpunct des Objectivs nicht sehr fein sind, so muß man bey der Messung der Höhen immer denselben Rand der Fäden mit dem Punct dessen Höhe man messen will in Berührung bringen, welches auch bey der Berichtigung des Quadranten zu beobachten ist; alsdann hat die Dike der Fäden auf die Beobachtungen keinen Einfluß.

Zapfen CD Fig. 12 darf keinen Spielraum haben, findet man welchen, so muß man die Schraube L etwas anziehen; auch muß man dem Zapfen und der Platte k ein wenig Fett geben. Man muß ebenfalls die Axe MN Fig. 9 so zwischen die Spitzen bey i und fg bringen, daß sie eine sanfte nicht wankende Bewegung hat, welches durch die Schraube h bewerkstelligt werden kann. Das Loth muß man vor jeder Beobachtung untersuchen, besonders wenn der Quadrant in einem hölzernen Gebäude aufgestellt ist. Um es gegen den Wind zu sichern, kann man ein leichtes Gehäuse aus Pappe, das den Puncten  $\alpha$  und  $\beta$  gegenüber ein Paar Gläser hat, anbringen,

### *Hadley's Spiegeloctant.*

#### S. 44.

Der Quadrant und andere ähnliche Instrumente zu Höhenmessungen, die man gewöhnlich in der Astronomie gebraucht, müssen auf festen Gestellen ruhen, wenn man damit beobachten will. Da dieses zur See nicht angehet, so sind zu Anstellung astronomischer Beobachtungen auf derselben verschiedene Werkzeuge ausgedacht worden. Unter diesen zeichnet sich vorzüglich der nach seinem Erfinder *Johann Hadley* so genannte *Hadleysche Spiegeloctant* oder *Spiegelsextant* aus. Er bekommt den ersten Nahmen wenn er ein Zirkelausschnitt von 45, den zweyten wenn er einer von 60 Graden ist. Hadley legte die erste Beschreibung von seinem



nem Octanten im Maj 1731 der königl. Societät in London, vor \*) deren Vicepraesident er war, und erklärte die Grundsätze, auf welche er gebaut ist. Sein erster Octant war von Holz, er liess nachher einen zweyten von Messing machen \*\*), mit welchen Versuche zur See angestellt wurden, welche die Brauchbarkeit dieses Instruments an den Tang legten. Demungeachtet verflossen wenigstens zwanzig Jahre, bis dieses vortreffliche Werkzeug in Gebrauch kam.

Einige Jahre nachher, nemlich im Jahr 1742 wurde unter den hinterlassenen Papieren Hadley's eine Handschrift *Newtons* gefunden, welche eine Zeichnung und Beschreibung von einem Instrument enthielt, das nicht sehr von dem ersten Instrument Hadley's verschieden war. Seine vorzüglichsten Eigenschaften und Gebrauch zur See waren ebenfalls angezeigt. «Daher,» sagt *Ludlam* \*\*\*), «scheint es, daß »in der That *Newton* der erste Erfinder von diesen Reflexionsquadranten war, ob es gleich vor »1742 niemanden als vielleicht dem D. Hadley »bekannt war, welcher noch nichts davon gewußt zu haben scheint, als er seinen Octanten der königlichen Societät bekannt »machte. Hadley's große Geschicklichkeit und »besondere Fertigkeit in der Optic (wovon »man viele Beweise in den philos. Trans. findet) lassen keinen Zweifel statt finden, daß »er

\*) Philos. Trans. Nr. 420.

\*\*) Philosoph. Trans. N. 425.

\*\*) Directions for the use of Hadley's Quadrant. London 1790.

»er gleichfalls der erste Erfinder war, und  
 »dem zu folge hat dieses Instrument immer :  
 »seinen Nahmen getragen.

### §. 45.

In der Folge lernte man immer mehr die Vorzüge kennen, welche der Hadleysche Sextant vor andern zu Anstellung astronomischer Beobachtungen auf der See bestimmten Instrumenten hatte. Die besten Künstler in London bemühten sich daher ihn vollkommener zu machen. *Ramsden*, welchem man die grose Vollkommenheit dieser Werkzeuge, mit welcher sie jetzt verfertigt werden, meistens zu verdanken hat, fand bey genauerer Untersuchung, daß dieses Instrument nicht solid genug war in seinen wesentlichen Theilen, die Alhidade war einer zu starken Reibung unterworfen, so daß man öfters das Ende derselben um einige Minuten fortbewegen konnte, ohne daß der an dem Umdrehungspunct angebrachte Spiegel seine Lage änderte, auch waren die Eintheilungen nicht fein genug. Hieraus schloß *Ramsden*, daß *de la Caille* Recht hatte, wenn er den Fehler, den man bey Messung der Abstände des Mondes von der Sonne und von Fixsternen begehen könne, auf 5 Minuten setzte. Er brachte im Jahr 1763 eine Maschine zu Stand, vermittlest welcher er dergleichen Instrumente in kurzer Zeit und mit einer großen Genauigkeit eintheilen konnte. Dieser Maschine bediente er sich bis gegen das Jahr 1773, da seine zweyte noch vollkommenere Theilungsmaschine fertig wurde,

wurde, mittelst welcher alle englischen Künstler ihre Sextanten eintheilen lassen. Ramsden bekam von der Commission wegen der Länge eine Belohnung von 300 Pf. Sterling, und 315 Pf. St. für seine Maschine, nachdem er sich anheischig gemacht hatte, alle Sextanten für 3 Schillinge einzutheilen. Für die Eintheilung eines Sextanten mit einem Vernier der 30 Sec. angibt, bekommt er 6 Schillinge. Andere Verbesserungen, welche Ramsden an den Sextanten anbrachte, werden unten nach der Beschreibung desselben vorkommen.

*Anmerkung.* Die Beschreibung von Ramsdens zweyter Theilmaschine kam in London 1777 heraus unter dem Titel: Description of an Engine for dividing mathematical Instruments, by Mr. Jesse Ramsden &c. London 1777. Allein die meisten Exemplare giengen in einem Brande verloren. La Lande hat davon eine französische Uebersetzung veranstaltet, welche in Paris 1790 heraus kam: Description d'une machine pour diviser les instruments de mathématiques, par M. Ramsden &c. traduite de l'anglois; augmentée de la description d'une Machine à diviser les lignes droites, et de la notice de divers ouvrages de Mr. Ramsden. Die erste perspectivische Zeichnung der Maschine ausgenommen hat La Lande alle Figuren um die Hälfte verkleinern lassen. Bey der Vergleichung dieser Uebersetzung mit dem englischen Original, welches H. Hofrath Lichtenberg mir mitzutheilen die Gute hatte, fand ich, daß die Figuren in dem Verhältniß von 9:5 verkleinert sind. La Lande hat hie und da vergessen, den Text darnach zu ändern. So sagt er zum Beysp. pag. 29 La Fig 9 represente cette machine de toute sa grandeur, da sie doch nur in ihrer halben natürlichen Gröfse vorgestellt ist. Was pag. 23 und 24 von den Worten: Il arrive souvent &c. bis d'attention en divisant steht, findet sich nicht in dem Original, und stünde schicklicher erst nach der Beschreibung.

schreibung des ganzen Chassis, weil man diese erst muß gelesen haben, um jenes zu verstehen. In das Deutsche übersezt findet man diese Beschreibung in H. I. G. Geislers Schrift über die Bemühungen der Gelehrten und Künstler mathematische und astron. Instrumente einzutheilen. Dresden 1792.

### §. 45.

Man suchte nun den Sextanten auch zu Beobachtungen auf dem festen Lande einzurichten. Der Seefahrer findet seinen Horizont in der weiten See, zu Land muß man sich einen durch *Kunst* zu verschaffen wissen. Von den verschiedenen zu dieser Absicht erfundenen Werkzeugen oder *künstlichen Horizonten* werde ich in der Folge reden. *Brander* in Augsburg gab dem Hadleyschen Octanten eine solche Einrichtung, daß man damit auch Höhenwinkel zu Land messen konnte. Allein die *wesentlichsten* Vorzüge eines Hadleyschen Winkelmessers vor andern giengen bey dieser Einrichtung verlohren. Es wurde daher auch der Hadleysche Sextant in Deutschland wenig oder gar nicht gebraucht, bis *Herr von Zach* und *Herr Graf Brühl* dieses vortrefliche Instrument auch in Deutschland bekannt machten, und Mittel erfanden, es zu Beobachtungen auf dem Lande sicher gebrauchen zu können.

### §. 47.

Ehe ich zu der Beschreibung des Spiegelsextanten komme, muß ich noch einige catoptrische Sätze vorausschicken. *Wenn auf einen ebenen Spiegel AB Fig. 4 ein Lichtstrahl*  
EG

FG auffällt, so wird dieser nach C so zurückgeworfen, daß der einfallende und zurückgeworfene Strahl FG und GC in einer auf der Ebene des Spiegels senkrechten Ebene liegen, und auf beyden Seiten gleiche Winkel AGF, BGC mit der Ebene des Spiegels machen \*). Fällt man auf den Punct des Spiegels, wo der Strahl auffällt ein Perpendikel pG, so folgt aus dem vorhergehenden, daß der Winkel pGF = Winkel pGC.

Man lasse den Lichtstrahl GH auf einen zweyten Spiegel CD auffallen, dessen Ebene senkrecht seye auf der Ebene die auf dem ersten Spiegel AB senkrecht steht, so wird der Strahl GH nach I so zurückgeworfen, daß  $GHC = IHD$ . Ferner liegt der von dem zweyten Spiegel zurückgeworfene Strahl HI in der auf ihn senkrechten Ebene, folglich sind FG und HI in einer Ebene. Man verlängere die Durchschnittslinien beyder Spiegel mit der auf denselben senkrechten Ebene AB und CD nach E, bis sie einander schneiden, so ist der Winkel HEG der Neigungswinkel beyder Spiegel. Wird FG und HI verlängert, bis beyde Linien einander schneiden in I, so ist FIH der Winkel, welchen der auf den ersten Spiegel AB fallende Lichtstrahl mit der Richtung HI macht, nach welcher er von dem zweyten Spiegel CD zurückgeworfen wird. Nun ist FGH ein äußerer Winkel des Dreyeks GHI, AGH ein äußerer Winkel des Dreyeks HEG, folglich  $FGH = GHI + GIH$  und  $AGH = HEG + GHE$  aber

\*) Kästners angew. Mathematik II. Th. I. Abth. Catoptrik 9, 10, 11, 12.

$$\begin{array}{l}
 \text{aber} \quad \text{AGF} = \text{EGH} \\
 \text{folglich} \quad \frac{\text{AGH} - \text{AGF}}{\text{FGH}} \Bigg) = \text{HEG} + \text{GHE} - \text{EGH} \\
 \text{daher} \quad \text{GHI} + \text{GIH} = \text{HEG} + \text{GHE} - \text{EGH} \\
 \text{also} \quad \text{GIH} = \text{HEG} + \text{GHE} - \text{GHI} - \text{EGH} \\
 \quad \quad = \text{HEG} + \text{IHE} - \text{EGH} \\
 \quad \quad = \text{HEG} + \text{GHC} - \text{EGH} \\
 \text{aber} \quad \text{HEG} = \text{GHC} - \text{EGH} \text{ weil } \text{GHC} \text{ ein} \\
 \text{äußerer Winkel des Dreyeks HEG, folg-} \\
 \text{lich ist} \\
 \quad \quad \text{GIH} = 2\text{HEG}
 \end{array}$$

*Wenn also zweyn ebene Spiegel auf einer Ebene senkrecht stehen, und auf einen derselben ein in jener Ebene liegender Lichtstrahl so auffällt, daß er auf die Oberfläche des zweyten Spiegels zurückgeworfen wird, so macht der Lichtstrahl nach seiner zweyten Zurückwerfung mit seiner ersten Richtung, nach welcher er auf den ersten Spiegel auffiel, einen Winkel, der so groß ist, als der gedoppelte Neigungswinkel beyder Spiegel. Auch liegen der einfallende und der von dem zweyten Spiegel zurückgeworfene Lichtstrahl in der Ebene, die auf beyde Spiegel senkrecht steht.*

### §. 37.

Wenn der einfallende Lichtstrahl mit dem durch gedoppelte Reflexion zurückgeworfenen parallel wird, so sind die Ebenen beyder Spiegel ebenfalls miteinander parallel. Denn es seyen AB und CD Fig. 5 die beyden Spiegel, FG, GH, HI der Weg des Lichtstrahls, so ist  
unter



unter dieser Voraussetzung  $FGH = GHI$ . Ferner  $AGF = BGH$  und  $GHC = IHD$ ; folglich  $AGF = \frac{1}{2}(180^\circ - FGH)$  und  $DHI = \frac{1}{2}(180^\circ - GHI) = \frac{1}{2}(180^\circ - FGH)$ , also  $AGF = DHI$  und  $AB$  mit  $CD$  parallel. Wird also der Spiegel  $AB$  Fig. 4 um den Punct  $G$  von  $B$  gegen  $I$  hin gedreht, so rücken die Puncte  $E$  und  $I$  immer weiter hinaus, und wenn beyde Spiegel parallel sind, so schneiden die Linien  $CE, AE$  und ebenso auch  $FI, HI$  einander nimmer; wird der Spiegel  $AB$  noch weiter gedreht, so fällt der Durchschnittspunct  $E$  auf die andere Seite desjenigen Theils des Lichtstrahls, der zwischen beyden Spiegeln liegt  $HG$ , und ebenso auch der Punct  $I$ . *Folglich liegen beyde Puncte  $E$  und  $I$  immer auf einerley Seite von  $GH$ .*

#### §. 49.

Wenn man beyde Spiegel zugleich so bewegt, daß die darauf senkrecht stehende Ebene ihre Lage nicht ändert, so wird der zurückgeworfene Strahl  $HI$  *immer in seiner Lage bleiben*, weil der Winkel, den er mit dem einfallenden Strahl  $FG$  macht, allein von dem Neigungswinkel beyder Spiegel abhängt. So wird man also einen gewissen Gegenstand  $F$  jener Bewegung ungeachtet in  $I$  immer nach der Richtung  $HI$  sehen. Dieses wird sich auch so zeigen lassen. Der Strahl, der vorher unter dem Winkel  $A GF$  auf den Spiegel  $AB$  auffiel, falle nun in  $g$  unter einem größern Winkel  $A g f$  auf, so wird er nach  $gh$  und von da aus nach  $hl$  zurückgeworfen.  $GH$  und  $gh$   
wer-



werden einander schneiden in  $n$ , weil  $ngE > nGE$ . Verlängert man  $FG$ ,  $fg$ , so schneiden sie sich aus gleichem Grunde in  $m$ . Nun ist  $nGg = mGg$  und  $ngG = mgG$ , folglich  $Gng = Gmg$ . Ebenso läßt sich zeigen, daß  $Hnh = Hkh$ , folglich  $Gng = Gmg = Hnh = Hkh = lkL$ .  $fih$  ist der Winkel, welchen der auffallende Lichtstrahl  $fg$  mit dem zweymal zurückgeworfenen  $hi$  macht; als äußerer Winkel des Dreyecks  $kiq$  ist er  $= ikq + iqq = Iqm + Imq$ . Aber auch  $FIH = Iqm + Imq$ , folglich  $fih = FIH$ . Stellt man sich nun vor die Veränderung der Lage des Lichtstrahls  $FG$  gegen den Spiegel  $AB$  seye durch eine gemeinschaftliche Bewegung beyder Spiegel bewirkt worden, so sieht man leicht, daß durch die Bewegung beyder Spiegel die Lage des zurückgeworfenen Strahls nicht könne geändert werden.

### §. 50.

In der auf beyde Spiegel  $AB$  und  $CD$  Fig. 6 Taf. 1. senkrechten Ebene seyen zwey Gegenstände  $O$  und  $F$ . Der Spiegel  $CD$  seye nur bis auf die Hälfte mit Zinfolie belegt, und befinde sich zwischen dem Auge des Beobachters in  $I$  und dem Gegenstand  $O$ . Man mache den Winkel  $DHI =$  dem Winkel  $CHG$  und ziehe von  $O$  nach dem Punct  $G$ , wo die Linie  $HG$  den Spiegel  $AB$  trifft, eine gerade Linie. Man bringe den Spiegel  $AB$  in eine solche Lage, daß seine Durchschnittsline  $AB$  mit der auf demselben senkrechten Ebene die Durchschnittsline  $CD$  des kleinen Spiegels auf derselben Seite von  $GH$ , auf welcher  $O$  liegt un-

ter einem Winkel durchschneide, der die Hälfte des Winkels  $\text{IOG}$  ist, so wird der von  $\text{O}$  nach  $\text{G}$  ausgehende Lichtstrahl  $\text{OG}$  in die Richtung  $\text{GH}$  und ferner in die Lage  $\text{HI}$  gebracht werden, die mit der Lage des geradezu von  $\text{O}$  durch den unbelegten Theil des Spiegels  $\text{CD}$  nach dem Auge des Beobachters  $\text{I}$  kommenden Lichtstrahls  $\text{OI}$  zusammenfällt. So wird man den Gegenstand  $\text{O}$  sowohl geradezu als auch durch doppelte Zurückwerfung nach einerley Richtung sehen. (§. 48.) Nun drehe man den großen Spiegel  $\text{AB}$  um eine in dem Punct  $\text{G}$  auf der Ebene durch  $\text{F}$ ,  $\text{O}$  und  $\text{G}$  senkrechte Axe und bringe ihn in die Lage  $(\text{ab})$  so daß die Verlängerung von  $(\text{ab})$  die Verlängerung von  $\text{CD}$  unterhalb der Linie  $\text{HG}$ , weil  $\text{I}$  unterhalb derselben liegt, schneide unter einem Winkel der halb so groß ist als der Winkel  $\text{OIF}$ , so wird man beyde Gegenstände  $\text{O}$  und  $\text{F}$  nach der Richtung  $\text{HI}$  sehen, ersteren gerade zu durch den unbelegten Theil des Spiegels  $\text{CD}$ , letzteren durch doppelte Zurückwerfung (§. 48). Der Winkel  $\text{FGO}$ , welchen die Gegenstände  $\text{O}$  und  $\text{F}$  an der Umdrehungsaxe des großen Spiegels machen, ist gleich der Summe der Winkel  $\text{GIO}$  und  $\text{GOI}$ . Gedenkt man sich  $\text{ab}$  und  $\text{AB}$  verlängert bis sie die Verlängerung von  $\text{CD}$  schneiden, so entsteht ein Dreyek, an welchem  $\text{AGa}$  ein äusserer Winkel ist, dem die Winkel entgegenstehen, welche der Spiegel in den Lagen  $\text{AB}$  und  $\text{ab}$  mit dem Spiegel  $\text{CD}$  machte. Die Hälfte des ersten ist dem Winkel  $\text{GOI}$  die des zweyten dem Winkel  $\text{GIO}$  gleich; beyder Summe  $= \text{AGa}$ . Folglich ist  $\text{FGO} = 2\text{AGa}$ . §. 51.

## §. 51.

Der Spiegel AB seye auf einem Lineal befestigt, das man um den Punct G so drehen kann, daß jener Spiegel immer senkrecht bleibt auf der Ebene die das Lineal beschreibt. Das Ende des Lineals gehe über einem eingetheilten Gradbogen, und auf der Linie HI stehe eine Platte cd senkrecht mit einer kleinen Oefnung, die so weit von der Ebene des Gradbogens abstehe, als die Linie auf dem kleinen Spiegel CD, welche den unbelegten Theil desselben von dem belegten trennt.

Will man nun den Winkel OGF messen, so bringe man den Mittelpunkt des Gradbogens in den Punct G, und wende das ganze Instrument so lange, bis man durch die Oefnung der Platte cd und den unbelegten Theil des Spiegels CD den Gegenstand O erblickt. Hierauf drehe man das Lineal auf welchem der Spiegel AB sitzt oder die Alhidade, bis man den Gegenstand O durch gedoppelte Reflexion in dem belegten Theil des kleinen Spiegels CD siehet. (Wenn bey O ein Stab ausgestekt ist, so wird man den obern Theil desselben durch den unbelegten Theil des Spiegels, den untern in dem belegten Theil sehen können.) Nun wird es leicht seyn, durch die Bewegung des großen Spiegels AB die beyden Theile des Gegenstands O, die man gerade zu und durch gedoppelte Zurückwerfung siehet, so übereinander zu bringen, daß der Gegenstand nicht mehr gebrochen erscheint. Man bemerke den Punct des Gradbogens auf welchen die Alhidade zeigt.

Nun bewege man den großen Spiegel so lange bis man auch den Gegenstand F durch doppelte Zurückwerfung in dem Spiegel CD siehet, und beyde Gegenstände F und O zusammenfallen. Man wird nun vermittlest des Gradbogens den Winkel messen können, um welchen der Spiegel von seiner ersten Lage, da man O sowohl gerade zu als durch doppelte Zurückwerfung in dem kleinen Spiegel CD sahe, bis zu derjenigen Lage, da man den Gegenstand F mit dem Gegenstand O zusammenfallen sahe, gedreht wurde. Dieser Winkel doppelt genommen ist alsdann so groß als der Winkel OGF (§. 50.).

### §. 52.

Um die Winkel genauer messen zu können, bringt man eine Fernröhre an, deren Axe in der Linie HI Fig. 6 liegt. Die eine Hälfte des Objectivs ist dem unbelegten Theil des Spiegels CD, die andere Hälfte dem belegten Theil zugekehrt. Ein halbes Objectiv macht so gut ein Bild von einem gewissen Gegenstand, als ein ganzes, nur nicht so helle. Vermittlest einer Fernröhre wird man also die Gegenstände O und F zugleich sehen können, wenn man den großen Spiegel AB so dreht, daß der Strahl FG so nahe in die Lage HI kommt, daß der Winkel, den er mit HI macht, kleiner ist als das Sehfeld der Fernröhre. Da wird man also beyde Bilder O und F zur Bedekung bringen können, und sie werden einander auch noch bedecken, wenn man gleich das ganze Instrument in der Ebene der

bey-

beyden Gegenstände bewegt (§. 49.). Mit einem solchen Werkzeug kann man also Winkel messen, ohne ein Gestell dafür nöthig zu haben; mit freyer Hand kann man das Instrument immer so halten, daß man den Gegenstand im Sehfeld der Fernröhre behält.

### §. 53.

Zu den Sextanten werden gewöhnlich *gläserne* Spiegel gebraucht, weil metallene durch die Seeluft bald ihre Politur verlieren würden. Bey diesen Spiegeln leiden die Strahlen außer der Zurückwerfung auch eine zweymahlige Brechung, auch werden einige von den auffallenden Strahlen von der ersten unbelegten Fläche des Spiegels zurückgeworfen. Es ist also zu untersuchen, ob diese Umstände einen Einfluß auf die Winkelmessung haben.

Ich nehme einen gläsernen Spiegel an, dessen beyde Oberflächen genau eben und einander parallel sind. Ein Durchschnitt dieses Spiegels senkrecht auf seine Ebene seye ABCD Fig. 28 Taf. V, E in Gegenstand, den man von M aus in dem Spiegel siehet. Von E falle ein Lichtstrahl EF auf den Spiegel, welcher nach I so gebrochen wird, daß sich der Sinus des Neigungswinkels PFE zu dem Sinus des Brechungswinkels PFH verhält wie  $m:n$  wenn  $m:n$  das Brechungsverhältniß aus Luft in Glas ist. Zieht man also BH mit dem Einfallslot PF parallel, und macht  $FH:FE = m:n$  oder  $= 3:2$ , und verlängert FH nach I, so wird FI der Weg des Lichtstrahls im Glase seyn. Von I wird der Strahl nach k hin so

zurückgeworfen, daß  $dIF = dIK$ , wenn  $dI$  senkrecht auf  $CD$  in dem Punct  $i$  steht. Da nun die Winkel bey  $K$  und  $F$  gleich sind, so wird der Strahl  $KI$  bey seinem Ausgang in die Luft um einen eben so großen Winkel von dem Einfallslot hinweggebrochen, als derjenige war, um welchen er bey seinem Eintritt in das Glas gegen das Einfallslot hin gebrochen wurde. Folglich werden die Verlängerungen von  $FE$  und  $MK$  einander in  $c$  so schneiden, daß der Durchschnittspunct in dem Perpendikel  $dI$  liegt. Zieht man also durch  $c$  eine Linie  $ab$  mit  $CD$  parallel, so ist der Winkel  $DCE =$  dem Winkel  $a c M$ , und der Lichtstrahl kommt so in das Auge in  $M$ , als ob er von einer Spiegelebene  $ab$  ohne Brechung wäre zurückgeworfen worden, welche die Linie  $dI$  in dem Punct  $c$  rechtwinklicht durchschneidet.

*Anmerkung.* Ludlam setzt das Verhältniß von  $Ic:cd = 1:2$ , wenn das Brechungsverhältniß wie  $2:3$  ist. Dieser Fehler rührt daher, daß er das Verhältniß von  $BE:BH$  dem Verhältniß des Sinus des Brechungswinkels zu dem Sinus des Einfallswinkels gleich setzt, anstatt das Verhältniß von  $FE:FH$  zu nehmen. Directions for the use of Hadley's Quadrant. pag. 83 n. 43 und pag. 84 Cor. 2. Daher gibt er die Vorschrift den großen Spiegel des Sextanten so auf die Alhidade zu setzen, daß der Mittelpunct um welchen sich die Alhidade dreht  $\frac{1}{2}$  der Dike des Glases von der hintern Fläche des Spiegels absteht. p. 84 n. 47. Dieselbe Vorschrift gibt Borda. Description et usage du cercle de reflexion. p. 15.

#### §. 54.

Man mache  $BE = BN$  und ziehe  $MN$ , so siehet das Auge in  $M$  den Gegenstand  $E$  wegen

gen der Zurückwerfung von der vordern Fläche des Spiegels AB nach der Richtung MN \*), durch Zurückwerfung von der hintern Fläche nach der Richtung MO. Folglich siehet man in M zwey Bilder von dem Gegenstand E, die um den Winkel NMO von einander abstehen. Dieser Winkel wird desto kleiner, je größer der Abstand des Gegenstandes E von dem Spiegel ist. Denn es ist  $BE = BN$  und  $bE = bO$  folglich  $NO = 2Bb = 2cd$ . Für einerley Einfallswinkel ist also NO eine beständige GröÙe, und der Winkel NMO wird desto kleiner werden, je größer MN wird, welches mit der Entfernung des Gegenstands E wächst.

### §. 55.

Die Lage des Puncts c, in welchem der einfallende Strahl EF und zurückgeworfene KM einander schneiden, kann auf folgende Art bestimmt werden. Da die Dreycke dFI und BFH; dFc und BFE einander ähnlich sind, so hat man  $cF:FI = FE:FH = n:m$  (§. 53.) in dem bey d rechtwinklichten Dreyek dIF verhält sich  $FI:dI = 1 : \cos dIF$  folglich verhält sich  $CF:dI = n : m \cos dIF$

$$= n : m \cos PFH$$

ferner  $CF:cd = 1 : \cos dcF$

$$= 1 : \cos PFE$$

---

also  $dI:cd = m \cos PFH : n \cos PFE$

aber  $\sin PFH = \frac{n}{m} \sin PFE$

folg-

\*) Kästners angew. Mathem. II. Th. I. Abth. Catoptrik 20.



$$\text{folglich } \cos PFE = \sqrt{1 - \frac{n^2}{m^2} \sin PFE^2}$$

$$= \frac{1}{m} \sqrt{m^2 - n^2 + n^2 \cos PFE^2}$$

daher

$$dl:cd = \sqrt{m^2 - n^2 + n^2 \cos PFE^2} : n \cos PFE$$

$$= m \sqrt{1 + \frac{m^2 - n^2}{m^2} (\tan PFE)^2} : n$$

setzt man  $m=3, n=2$ , so hat man

$$dl:cd = 3 \sqrt{1 + \frac{5}{9} \tan PFE^2} : 2$$

Folglich ist das Verhältniß von  $dl : cd$  nicht = dem beständigen Verhältniß  $= 3:2$ , sondern nähert sich demselbigen desto mehr, je kleiner der Winkel  $PFE$  ist.

## §. 56.

Nun läßt sich auch leicht der Winkel  $NMO$  bestimmen, um welchen die von den beyden Spiegelflächen gemachten Bilder des Gegenstands  $E$  von einander abzustehen scheinen. In dem Dreyek  $NMO$  hat man  $NO = 2cd$ , und  $NOM = PFE$ , folglich verhält sich

$$2cd : \sin NMO = MN : \sin PFE$$

aber

$$2dl : 2cd = \sqrt{m^2 - n^2 + n^2 \cos PFE^2} : n \cos PFE (\S. 55)$$

folglich

$$2dl : \sin NMO = MN \sqrt{m^2 - n^2 + n^2 \cos PFE^2} : n \sin PFE \cos PFE$$

Kürze halber seze man

$$dl = a, NMO = y, MN = d, PFE = x$$

so hat man

$$\begin{aligned}\sin y &= \frac{2an \sin x \cos x}{\delta \sqrt{(m^2 - n^2 + n^2 \cos x^2)}} \\ &= \frac{an \sin 2x}{\delta \sqrt{\left(\frac{2m^2 - n^2}{2} + \frac{n^2}{2} \cos 2x\right)}} \\ &= \frac{an}{\delta \sqrt{\left(\frac{2m^2 - n^2}{2}\right)}} \times \frac{\sin 2x}{\sqrt{\left(1 + \frac{n^2}{2m^2 - n^2} \cos 2x\right)}}\end{aligned}$$

### §. 57.

Der Winkel  $y$  wird  $= 0$  wenn  $x = 0$  oder  $= 90^\circ$ ; zwischen diese beyden Werthe von  $y$  fällt ein *Gröstes*. Um es zu bestimmen, differentüre man obige Gleichung für  $y$ , indem man  $y$  und  $x$  als veränderlich betrachtet, so findet sich

$$\begin{aligned}dy \cos y &= \frac{an dx}{\delta \sqrt{\left(\frac{2m^2 - n^2}{2}\right)}} \times \\ &\frac{2\left(1 + \frac{n^2}{2m^2 - n^2} \cos 2x\right) \cos 2x + \frac{n^2}{2m^2 - n^2} \sin 2x^2}{\left(1 + \frac{n^2}{2m^2 - n^2} \cos 2x\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

folg-

$$\text{folglich } \frac{dy}{dx} = \frac{an}{\delta \sqrt{\left(\frac{2m^2 - n^2}{2}\right)}} \times$$

$$\frac{\frac{n^2}{2m^2 - n^2} \cos 2x^2 + 2 \cos 2x + \frac{n^2}{2m^2 - n^2}}{\cos y \left(1 + \frac{n^2}{2m^2 - n^2} \cos 2x\right)^{\frac{3}{2}}}$$

dieses kann nur alsdann verschwinden, wenn

$$\frac{n^2}{2m^2 - n^2} \cos 2x^2 + 2 \cos 2x + \frac{n^2}{2m^2 - n^2} = 0$$

$$\text{folglich } \cos 2x = \frac{n^2 - 2m^2 \pm \sqrt{(m^2 - n^2)}}{n^2};$$

wenn  $y$  ein Gröstes ist. Setzt man

$$m=3, n=2, \text{ so wird } \cos 2x = \frac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

daher ist der mögliche Werth von  $\cos 2x = -0,1458972$  und  $x$  oder PFE  $= 49^\circ 11' 40''$

## §. 58.

Oben (§. 24.) hatten wir

$$\sin y = \frac{an}{\delta \sqrt{\left(\frac{2m^2 - n^2}{2}\right)}} \times \frac{\sin 2x}{\sqrt{\left(1 + \frac{n^2}{2m^2 - n^2}\right) \cos 2x}}$$

daher für  $n=2, m=3,$

$$\sin y = \frac{2a \sin 2x}{\delta \sqrt{(7 + 2 \cos 2x)}} = \frac{2a}{\delta \sqrt{7}} \cdot \frac{\sin 2x}{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{7} \cos 2x\right)}}$$

Man setze  $\frac{2}{7} \cos 2x = \cos Q$  so wird

$$\sin y = \frac{2a}{\delta \sqrt{14}} \cdot \frac{\sin 2x}{\cos \frac{1}{2} Q}.$$

Für

Für das Maximum setze man

$x = 49^{\circ} 11' 40''$ , so wird der größte Werth von

$\sin y = 0,7639 \cdot \frac{a}{\delta}$  und wenn man die Dike des

Glases oder  $a = 0,0125$  Fußs setzt

$\sin y = \frac{0,0095487}{\delta}$ . Es ist aber der Sinus

von 1 Secunde

$= 0,000004848$ , folglich kann  $y$  keine Sekunde betragen wenn

$\frac{0,0095487}{\delta} < 0,000004848$  oder wenn

$\delta > \frac{0,0095487}{0,000004848}$  Fußs  $> 1969,6$  Fußs

Wenn also die Dike des Spiegels  $= 0,0125$  Fußs und der Abstand des Gegenstands, den man in dem Spiegel betrachtet, 1970 Fußs ist, so ist der größte scheinbare Abstand beyder Bilder schon kleiner als eine Secunde. Für einen Gegenstand in unendlicher Entfernung fallen beyde Bilder zusammen.

Das von I nach K zurückgeworfene Licht wird zum Theil von der vordern Oberfläche AB des Spiegels wieder auf die hintere Fläche CD, und von da aus aufs neue nach AB zurückgeworfen und daselbst der Strahl bey seinem Ausgange in die Luft gebrochen. Daher gibt es von einem Gegenstand E unzählich viele Bilder, die immer schwächer und schwächer werden, und sämmtlich in einer auf der Ebene des Spiegels verticalen und durch den Ort des Gegenstandes und des Auges gehenden

den Ebene liegen. Gewöhnlich ist das dritte Bild schon sehr schwach, so daß man es nur alsdann bemerken kann, wenn man sehr helle Gegenstände in dem Spiegel betrachtet. Für unendlich entfernte Gegenstände fallen alle diese Bilder zusammen, weil in diesem Fall alle auf den Spiegel auffallende Lichtstrahlen parallel sind, in dem Glase um gleiche Winkel gebrochen werden und daher wieder mit einander parallel zurückgeworfen werden.

### *Beschreibung eines Spiegelsextanten.*

#### §. 22.

Auf der V. Tafel Fig. 29 siehet man eine perspectivische Zeichnung des ganzen Spiegelsextanten. Der Gradbogen GH bestehet mit den Halbmessern EI, EL der Mittelpunctsplatte m und den Verbindungsstücken MN, OK, Op, Oq aus *einem* durchaus 4 Lin. dicken Stück Messing. Die Alhidade EF dreht sich vermittelst eines daran befestigten conischen Zapfens von Stahl in einer ähnlichen conischen Hölung, die sich in einem Stück Glockenmetall befindet, das durch Schrauben mit der Mittelpunctsplatte verbunden ist. Gegen den Mittelpunct E endigt sich die Alhidade in eine runde Platte, auf welcher der große Spiegel AB senkrecht befestigt ist, gegen dem anderen Ende F, hin wird sie wieder breiter, und endigt sich in das Stück xy welches den Vernier trägt. Der Alhidadenhalter VW hängt mit der Alhidade durch das Stück kl zusammen, welches in einer Vertiefung der Vernier-

nierplatte Fxy liegt; es wird durch zwey Kreisbogen begränzt, die aus dem Mittelpunct des Sextanten E beschrieben werden. Durch die Micrometerschraube KF kann man der Alhidade eine sanfte Bewegung geben, da sich dann das Stük kl in der Vertiefung der Platte Fxy leicht hin und her schiebt. Durch die Schraube Ww wird der Alhidadenhalter zugleich mit der Alhidade festgestellt und losgemacht. Die Abtheilungen sind auf dem schief gearbeiteten Rande 'Hrst und also auf der Zone eines Kegels angebracht so wie die auf der Vernierplatte xy, Beyde sind Fig. 31 im Profil in ihrer wahren Gröfse vorgestellt, und mit denselben Buchstaben bezeichnet. Auf der Alhidade sitzt eine Röhre h welche den Stift  $\alpha$  Fig. 30 aufnimmt, und dazu dient das Vergrößerungsglas  $\delta$  über dem Vernier xy zu halten. Dem grofsen Spiegel AB gegenüber steht der kleine Spiegel CD, welcher vermittelt zweyer Zapfen zwischen zweyen Baken befestigt ist, wovon man hier nur einen g siehet, und um jene Zapfen als um eine der Ebenen des Sextanten parallele Axe vermittelt der Schraube ef ein wenig gedreht werden kann. Dem kleinen Spiegel gegenüber ist an dem Körper des Sextanten eine Röhre Q angebracht, in deren Hölung genau ein messingenes Parallelepipedum paßt, das mit dem Ring R aus einem Stük besteht, in welchen die Fernröhre TU eingeschraubt wird, und vermittelt der Schraube S nach einer auf der Ebene des Sextanten senkrechten Richtung auf und nieder bewegt werden kann.

Durch

Durch Umdrehung der Schraube S kann man also die Fernröhre TU der Ebene des Sextanten näher bringen oder davon entfernen, so daß ihre Axe jener Ebene beständig parallel bleibt. Die Säule  $\alpha\beta$  trägt drey gefärbte Gläser von verschiedener Dunkelheit, welche sich um die Axe  $\beta$  so drehen lassen, daß man ihre Mittelpunkte hinter dem kleinen Spiegel in die Verlängerung der Axe der Fernröhre TU bringen kann.  $a, b, c, d$  sind drey andere ähnliche Gläser, welche man zwischen den grossen und kleinen Spiegel bringen kann, wie dieses an dem mittlern  $ab$  gezeigt ist. P ist der Handgrif, an welchem der Sextant gehalten wird.

#### §. 60.

Die Vorrichtung an dem Mittelpunkt ist Fig. 32 in ihrer natürlichen Grösse und im Profil vorgestellt. In die Mittelpunctsplatte  $mn$  ist das Stück Glockenmetall  $tuv$  eingelassen und mit drey Schrauben, wovon man zwey bey  $x$  und  $y$  siehet, darauf befestigt. In diesem Stück dreht sich der aus zweyen abgekürzten Kegeln zusammengesetzte stählerne Zapfen  $qrs$ , auf dessen Axe senkrecht eine messingene Scheibe mit einem kurzen cylindrischen Zapfen  $kl$  aufgenietet und gelöthet ist. Vermittelt dieser Platte, welche in die Alhidade EF eingelassen, und durch drey Schrauben  $op$  daran befestigt ist, wird der stählerne Zapfen  $qsr$  mit der Alhidade fest verbunden. Das Ende dieses Zapfens  $r$  ist viereckigt und geht in eine kleine messingene Platte, welche durch



durch eine Schraube  $w$  angedrückt wird, um den Zapfen genau in seiner Hölung zu halten. Der dikere Kegel des Centralzapfens  $s$  macht, daß er sich nicht einzwängen und keine starke Reibung entstehen kann. Endlich wird noch das hervorragende Stük des Mittelpunctszapfens durch eine Röhre  $\alpha\beta\gamma$  bedekt, welche durch drey Schrauben  $\delta e$  an die Mittelpunctsplatte  $m n$  angeschraubt wird und zugleich dem Sextanten zu einem Fusse dient; zwey andere befinden sich bey  $I$  und  $L$  Fig. 29, wovon der eine bey  $\mu$  ein wenig sichtbar ist. Wird der Handgrif  $P$  sammt dem Stük  $Q S$  weggenommen, so sizt der Sextant auf jenen dreyen Füßen auf, wenn er horizontal hingelegt wird.  $A B$  ist der groſse Spiegel, welcher in seinem Gehäuse auf dreyen unter den Platten  $h i, g f, d e$  befindlichen kurzen Stiften aufliegt, und durch die Schrauben  $a b$  und  $c$  an jene Stifte angedrückt wird. Der Spiegel selbst ist so auf die Alhidade gesetzt, daß der Mittelpunct des Sextanten die Dike der Gläser halbirt. Die Durchschnittslinie des Spiegels mit der Ebene der runden Platte  $E$  der Alhidade, auf welcher er senkrecht steht, geht mitten durch die Alhidade an den Punct  $10$  des Vernier  $x y$ .

### §. 61.

Den kleinen Spiegel  $C D$  siehet man Fig. 33. Er wird durch drey Schrauben  $a b c$  auf ähnliche Art wie der groſse in seiner Fassung befestigt. Der Theil  $b c e f$  ist mit Zinfole belegt, der übrige Theil  $e f a$  unbelegt und auch die Fassung durchbrochen.  $g$  und  $h$  sind die beyde

beyden Zapfen um welche er sich drehen kann. Der Theil ik geht in eine viereckigte Vertiefung in dem Körper des Sextanten hinein, welche so weit ist, daß noch einiger Spielraum übrig bleibt. Die Vorrichtung, wodurch der Spiegel um die Axe g h gedreht wird, zeigt die 34. Figur in ihrer natürlichen Gröfse. Ig ist einer von den beyden Baken, zwischen welchen der Spiegel vermittelst der Zapfen g und h Fig. 33 aufgehängt ist. Jeder wird durch zwey Schrauben eine l und eine andere, welche durch den Körper des Sextanten von unten herauf in die Gegend von g geht auf den Sextanten fest aufgeschraubt. In der Richtung der Schraube de ist in den Sextanten ein cylindrisches Loch von  $2\frac{1}{4}$  Lin. im Durchmesser gebohrt, in welchem hinten eine stählerne schraubenförmig gewundene Feder m liegt, wodurch das Stük ik beständig gegen die Schraube de angedrückt wird. Der Cylinder df, in welchem sich die Schraubenmutter für die Schraube de befindet, bestehet mit der messingenen rechtwinklicht gebogenen Platte ab aus einem Stük, und ist bey f etwas aufgeschlizt, um ihn vermittelst der Schraube f zusammendrücken und dadurch die Schraube de fest stellen zu können. Die rechtwinklichte Platte ist auf den Sextanten vermittelst sechs Schrauben, davon viere in dem verticalen Theil (an) sind, aufgeschraubt, und verschließt unten das oben erwähnte viereckigte und auf der Seite das runde in den Sextanten gemachte Loch. Die Schraube e wird vermittelst eines Schlüssels, der den vier-

viereckigten Zapfen e aufnimmt, umgedreht, nachdem man zuvor die Schraube f etwas losgeschraubt hat.

### §. 62.

**Der schiefe Theil des Gradbogens** Hrst so wie die Vernierplatte, ist mit einer  $\frac{1}{3}$  Lin. dicken silbernen Platte überzogen, worauf die Abtheilungen sind. Dieser silberne Limbus ist mit funfzehn versenkten silbernen Schrauben aufgeschraubt, deren Köpfe nach dem Aufschrauben abgefeilt und polirt sind, so daß man sie kaum erkennen kann, wozu auch noch die Verschiedenheit der Farbe, welche der Limbus und die Schrauben haben, etwas beyträgt. Die silbernen Gradbogen haben einen gedoppelten Vorzug vor den messingenen. Für das erste nehmen sich die schwarzen sehr feinen Theilstriche auf dem weissen Grunde sehr gut aus, fürs zweyte läuft das Silber nicht so leicht an wie Messing, welches bey lezterem nicht verhütet werden kann, da man den Gradbogen nicht wie die übrigen Theile des Sextanten mit Firniß überziehen darf. Der Bogen von 60 Graden ist in 120 gleiche Theile, welche hier für ganze Grade gelten, (§. 51.) eingetheilt; jeder von diesen Theilen wieder in 3 gleiche Theile, welche folglich auf diesem Instrument zwanzig Minuten betragen. Von diesen leztern Theilen sind 39 auf die Vernierplatte xy getragen, und in 40 gleiche Theile getheilt. Folglich ist eine jede Abtheilung auf dem Vernier um  $\frac{1}{40}$  kleiner als eine Abtheilung auf dem Limbus. Da aber diese 20 Min. beträgt, so ist der Ueberschuß einer Abtheilung auf dem

F

dem

dem Limbus über eine auf dem Vernier  $\frac{1}{2}$  Minute oder 30 Secunden. Wenn also Z. B. der siebente Theilstrich des Vernier auf einen Theilstrich des Gradbogens trifft, so steht der Anfangspunct des Vernier von dem nächstvorhergehenden Theilstrich des Limbus 7. 30 Secunden oder 3 Min. 30 Secunden ab. Um dieses Zählen zu erleichtern sind auf dem Vernier die Zahlen 0 10 20 aufgestochen. Der Anfangspunct oder Index des Vernier fällt mit dem Anfangspunct des Gradbogens zusammen, wenn die Alhidade den Radius NL bedeckt; auch hat der Spiegel CD eine solche Lage, daß er alsdann mit dem großen Spiegel AB parallel ist. So gibt die Alhidade unmittelbar den *gedoppelten Neigungswinkel der beyden Spiegel* an. In den Alhidadenhalter kann man die übersilberte Platte x einstecken, welche die Abtheilungen beleuchtet, die man durch das Vergrößerungsglas Fig. 30 betrachtet.

### §. 63.

Der Träger der Fernröhre RQS Fig. 29 ist Fig. 35 Taf. IV besonders vorgestellt. Die Röhre Qq hat eine auf ihre Axe senkrechte Platte bc, welche man bey  $\beta\gamma$  im Durchschnitt senkrecht auf bc, bey T im Grundriß siehet. Auf der untern Fläche von q Fig. 29 sind zwey Stücke Messing angeschraubt, zwischen welche die Platte bc so hineingeschoben wird, daß die Röhre Qq senkrecht auf der Ebene des Sextanten steht. Von g bis h ist eine viereckigte Hölung, in welche genau das Parallelepipedum lf paßt, das oben den  
Ring

Ring R trägt. In diesem Parallelepipedo befindet sich eine Schraubenmutter für die stählerne Schraube B, welche gedoppelte Gänge hat, um eine geschwindere Bewegung hervorzubringen, so daß jede Umdrehung der Schraube 1 Lin. Bewegung macht. Der cylindrische Theil der Schraube B paßt in die Oefnung e, der darüber befindliche Absatz m sitzt bey h auf, und an den vierkantigen Theil d wird die Scheibe S angestekt, welche durch eine Schraube s angedrückt wird. Dieses verstatet der Schraube AB blos eine Bewegung um ihre Axe, daher wird die Stange lf durch Umdrehung jener Schraube auf und nieder bewegt. Bey ki ist in die Kante des Parallelepipedums ein Einschnitt gemacht, in welchen eine kleine in der Röhre Qq befindliche Schraube a hineingeht, und folglich der Stange Spielraum auf die Weite ki einschränkt, wodurch das gänzliche Herausschrauben der Schraube AB aus ihrer in fg befindlichen Mutter verhindert wird.

#### §. 64.

Um einem Künstler noch genauere Anweisung zur Verfertigung eines solchen Sextanten zu geben, theile ich hier die Abmessungen aller Theile desselben nach dem Londner Fuß mit.

#### *Körper des Sextanten.*

Halbmesser bis zu dem Anfang des	z.	Lin.
schiefen Randes - - - -	5	0
F 2		Breite

Breite des oberen Theils des Grand-	z.	Lin.
bogens (G t Fig. 29) - - -	0	2
Halbmesser bis zu dem Ende des		
schiefen Randes - - - -	5	3
Durchmesser der Mittelpunctsplatte -	1	6
Durchmesser der Scheibe o Fig. 29 -	0	6
Breite des Stücks OK bey O - -	0	5
— — — — am Ende, so wie der		
Halbmesser		
EL, EL an ihren Enden I und L -	0	3
Breite der Streben Op Oq - -	0	3
Breite des Stücks MN - - -	0	4
Dike des ganzen Sextanten durchaus	0	4

### *Vorrichtung am Mittelpunct.*

Durchmesser der Scheibe von Glo-		
kenmetall tu Fig. 32 - - -	0	11,5
Dike - - - - -	0	1,7
Aeusere Dike desjenigen Theils des		
daran befindlichen Cylinders zv,		
welcher nicht in der Centralplat-		
te steckt - - - - -	0	4
Aeusere Dike des übrigen Theils je-		
nes Cylinders - - - - -	0	3
Seine Länge von der untern Fläche		
der Centralplatte an - - -	0	9

### *Alhidade.*

Durchmesser ihrer runden Platte -	1	6
Breite an der Platte - - -	0	5
— bey F - - - - -	0	3,7
Länge der Vernierplatte - - -	0	11.
Dike der ganzen Alhidade und der		
Vernierplatte - - - -	0	1,5
		Grös-

Größere Grundfläche des abgekürzten Kegels s	z.	Lin.
an dem Mittelpunctszapfen - -	0	3,2
kleinere Grundfläche - - -	0	2,0
Durchmesser des Mittelpunctszapfens am Ende r - - - -	0	1,8

### *Micrometerschraube.*

Dike des cylindrischen Theils der Micrometerschraube - - -	0	1,5
— — mit Schraubengängen versehenen Theils - - - -	0	1,3
Länge der ganzen Schraube - -	1	8
Dike der Platten aus welchen der Alhidadenhalter V W Fig. 29 besteht - - - - -	0	1,5

### *Der grofse Spiegel.*

Länge des grofsen Spiegels - -	1	3
Höhe desselben - - - -	1	0

Der Spiegel ist so aufgestellt, daß der Mittelpunct des Sextanten in die Mitte der Dike des Glases fällt. Er macht mit dem Index des Vernier einen Winkel von 3 Gr. von F gegen I Fig. 29.

### *Der kleine Spiegel.*

	z.	Lin.
Breite des kleinen Spiegels - -	0	7
Höhe — — — - - - -	0	10
Höhe des messingenen Stücks bci Fig. 33 - - - - -	0	3
Länge des Zapfens ik - - -	0	4

F 3

Breite



	Z.	Lin.
Breite — — — — —	0	2,7
Dike — — — — —	0	1.
Höhe der Belegung des Spiegels —	0	5
Abstand der Mitte des kleinen Spiegels von dem Mittelpunkt des Sextanten — — — — —	2	11

Ein auf seine Mitte gefälltes Perpendikel halbirt den Winkel, welchen eine aus dem Mittelpunkt des Sextanten an den Mittelpunkt des kleinen Spiegels gezogene Linie mit der Verlängerung der Axe der Fernröhre macht. Dieser Winkel beträgt 30 Grade.

### *Gefärbte Gläser.*

	Z.	Lin.
Durchmesser der gefärbten Gläser —	0	8

Das erste Glas y ist grün und so helle, daß man noch Sterne der ersten und zweyten Größe dadurch sehen kann.

Das zweyte oder mittlere ebenfalls grün und ein wenig dunkler.

Das dritte braun und so dunkel, daß man die Sonne dadurch betrachten kann ohne sehr geblendet zu werden.

Durch alle drey Gläser siehet man die Sonne noch deutlich und in einer gelblichten Farbe.

### *Die Fernröhre.*

Das Objectiv achromatisch; seine	Z.	Lin.
Brennweite — — — — —	6	0
Oefnung des Objectivs — — —	0	7,5
Brennweite des Collectivglases —	0	7,0
		Durch-

Durchmesser	— — — — —	Z.	Lin.
		0	5,5

es ist planconvex und die Convexe

Seite gegen das Objectiv gekehrt.

Brennweite des Oculars	- - -	0	4,5
------------------------	-------	---	-----

Durchmesser	— — — — —	0	2,0
-------------	-----------	---	-----

planconvex und die ebene Fläche gegen das Auge gekehrt; welches ganz nahe daran gehalten wird. In seinem Brennpunct ist die Blendung mit einer Oefnung von 3,2 Lin. in welcher zwey Paare feiner von dem Mittelpunct 0,6 Lin. abstehender Silberfäden senkrecht auf einander ausgespannt sind. Der Abstand des Collectivglases von den Fäden beträgt 2 Lin. und die Fäden selbst befinden sich zwischen dem Ocular und Collectivglas.

Eine zweyte Ocularröhre zu schwächerer Vergrößerung hat folgende Abmessungen.

Brennweite des Collectivglases	-	Z.	Lin.
		0	12,5

Durchmesser	— — — — —	0	6
-------------	-----------	---	---

Durchmesser der Blendung	- - -	0	3,0
--------------------------	-------	---	-----

In dieser Oefnung sind zwey einander parallele von dem Mittelpunct 0,6 Lin. abstehende Silberfäden ausgespannt.

Abstand des Collectivglases von den

Fäden	- - - - -	0	5.
-------	-----------	---	----

Brennweite des Oculars	- - -	0	7,7
------------------------	-------	---	-----

Durchmesser	— — — — —	0	2,5
-------------	-----------	---	-----

Noch gehört zu dem Sextanten eine Röhre, welche man statt der Fernröhre aufschrauben kann. Sie ist  $3\frac{1}{2}$  Zolle lang, hat gegen dem kleinen Spiegel hin eine Blendung von

4 Lin. Oefnung, gegen dem Auge eine von 1,2 Lin und ist innen geschwärzt. Man gebraucht sie, wenn man ohne Fernröhre Winkel messen will.

### *Berichtigung des Spiegelsextanten.*

#### §. 65.

*Untersuchung, ob der grosse Spiegel auf der Ebene des Sextanten senkrecht stehe.*

Hiezu gebraucht man die Fig. 36 Taf. IV gezeichnete Dioptern. A und B sind zwey rechtwinklicht gebogene Messingplatten. Erster hat eine sehr kleine Oefnung a, der andern Verticalseite ist durchbrochen, und mit ihrer Grundfläche parallel ein feiner Silberfaden bc ausgespannt, so dafs, wenn beyde Stüke auf einer Ebene mit ihren verticalen Seiten zusammengefügt werden, der Faden bc die Oefnung a genau in der Mitte durchschneidet. Will man nun die Lage des grossen Spiegels untersuchen, so legt man den Sextanten horizontal, nachdem man die Handhabe P und das Stük OS Fig. 29 weggenommen hat, und setzt das Stük A so auf den Gradbogen des Sextanten, dafs der Fuß b gegen den grossen Spiegel gekehrt ist. Nun hält man das Auge ganz nahe an die Oefnung a, siehet durch dieselbe nach dem grossen Spiegel, und dreht ihn vermittelst der Alhidade, bis man das Bild von A darin siehet. Hierauf setzt man das Stük B ganz nahe bey der runden Platte der Alhidade auf den Sextanten auf. Geht der Faden

Faden  $bc$  genau durch die Mitte des Bildes, welches der Spiegel von der Oefnung  $a$  macht, so steht der groſse Spiegel auf der Ebene des Sextanten senkrecht. Denn die Oefnung, durch welche man siehet, ihr Bild und der Faden vor dem Spiegel liegen hier in einer geraden Linie, welche daher auf dem Spiegel senkrecht ist; diese Linie ist aber auch wegen der gleichen Entfernungen der Oefnung der Platte  $a$  und des Fadens  $bc$  von der Ebene des Sextanten derselben parallel. Folglich steht in diesem Fall der groſse Spiegel auf der Ebene des Sextanten senkrecht. Findet sich dieses nicht, so muſs man dadurch diesen Fehler abzuheffen suchen, daſs man nach Beschaffenheit der Umstände den unter der Platte  $hi$  Fig. 32 oder die unter den Platten  $de, gf$  befindlichen Stifte, auf welchen der Spiegel aufliegt, verkürzt. Man sieht leicht, daſs das erstere geschehen muſs, wenn das Bild der Oefnung der Platte  $A$  über dem Faden  $bc$  erscheint, das letztere, wenn jenes Bild unter dem Faden liegt.

## §. 66.

*Den kleinen Spiegel auf die Ebene des Sextanten senkrecht zu stellen.*

Man richtet die Fernröhre  $TU$  nach einem deutlichen Punct, und bewegt die Alhidade des groſsen Spiegels, bis man denselben Punct durch gedoppelte Reflexion in das Sehfeld bekommt; beyden Bildern kann man einerley Helligkeit geben, wenn man die Fernröhre ver-

mittelst der Schraube S der Ebene des Sextanten näher bringt, oder sie davon entfernt, weil alsdann das Objectiv mehr oder weniger Strahlen von dem durch gedoppelte Reflexion gesehenen Gegenstand bekommt.

Kann man nun beyde Bilder durch Bewegung der Alhidade genau zur Bedekung bringen, so steht der kleine Spiegel auf der Ebene des Sextanten senkrecht. Geht aber das eine Bild über oder unter dem andern hinweg, so muß man den kleinen Spiegel mittelst der Schraube ef so stellen, bis beyde Bilder durch Bewegung der Alhidade zur Bedekung gebracht werden können. Am besten läßt sich diese Berichtigung mittelst heller Sterne machen. Fallen beyde Bilder, welche das Objectiv von dem Stern so wohl durch directe als durch zweymal reflectirte Strahlen macht zusammen, so sind beyde Spiegel einander parallel (§. 48.). Da man nun den großen Spiegel schon senkrecht auf die Ebene des Sextanten gestellt hat (§. 65.), so ist auch der kleine Spiegel auf jener Ebene senkrecht.

### §. 67.

*Die Lage der Axe der Fernröhre gegen die Ebene des Sextanten zu berichtigen.*

Man lege den Sextanten horizontal und bringe die Fäden in der Fernröhre oder das eine Paar derselben in eine der Ebene des Sextanten parallele Lage. Man stelle die Diopter B Fig. 36 neben dem kleinen Spiegel, die Diopter A neben der Fernröhre so auf die Ebene

Ebene des Sextanten, daß eine durch ihre Mitte gezogene gerade Linie ungefähr der Axe der Fernröhre parallel ist. Man bringe durch Erhöhung oder Erniedrigung der einen Seite des Sextanten den Faden der Diopter B auf einen entfernten deutlichen Punt. Siehet man diesen zwischen den beyden horizontalen Fäden der Fernröhre in der Mitte, so hat die Axe derselben ihre gehörige der Ebene des Sextanten parallele Lage.

An dem hier beschriebenen Sextanten ist keine Vorrichtung angebracht, die Fernröhre der Ebene desselben parallel zu stellen, wenn man ihre Lage fehlerhaft gefunden hätte. Man kann aber leicht eine solche Vorrichtung auf folgende Art anbringen. *d c e f* Fig. 37 Taf. IV stellt den Ring im Profil vor in welchen die Fernröhre eingeschraubt wird. *a b* ist der Ring welcher mit dem Parallelepipedo *l f* Fig. 35 aus einem Stük besteht, und so weit ist, daß der Ring *d c e f* noch einigen Spielraum darinnen hat. Gegen die beyden Endpuncte des verticalen oder auf der Ebene des Sextanten senkrechten Durchmessers des Rings sind Löcher für die beyden Schrauben *d* und *f* welche ihre Muttern in dem Ring *a b* haben. Auf beyden Seiten des horizontalen Durchmessers befinden sich zwey stumpfe Spizen *g*, welche auf dem Ring *a b* aufsizen. Hier kann man also vermittelst der Schrauben *d* und *f* dem Ring *c d e f* eine kleine Bewegung um den der Ebene des Sextanten parallelen Durchmesser geben, und folglich die Axe der Fernröhre derselben Ebene parallel stellen.

Ge-

Wenn der Gegenstand, den man zu dieser Berichtigung wählt, nicht nahe liegt, so kann man auch die Dioptern bey I und L Fig. 29 aufstellen. Vermittelst einer Probirfernrohre (§. 36.) lässe sich diese Berichtigung noch schärfer machen, es wird sich aber unten zeigen, daß eine kleine Neigung der Fernrohre gegen die Ebene des Instruments keinen merklichen Fehler verursacht, auch wird ebenda selbst noch eine Methode diesen Fehler zu entdecken vorkommen. Man sehe §. 85.

### §. 68.

*Den Fehler des Index zu bestimmen.*

Wenn man das directe und reflectirte Bild eines entfernten Gegenstandes, z. B. eines Sterns zur Bedekung bringt, so muß der Anfangspunct oder Index des Vernier mit dem Nullpunct des Gradbogens zusammenfallen. Findet sich dieses nicht, so ist der Winkel, welchen die Alhidade angibt, der Fehler des Index. Weil dieser Fehler bald auf diese bald auf jene Seite des Nullpuncts fallen kann, so befinden sich auf dem Gradbogen noch einige Grade jenseits des Nullpuncts um ihn bestimmen zu können. Die Engländer nennen diesen Theil des Gradbogens *the excedent limb* oder *the arch of excess*. Dieselbige Berichtigung kann man vermittelst der Sonne machen, in welchem Fall man die gefärbten Gläser y und z Fig. 29 vorschiebt. Gibt die Alhidade den Fehler auf dem Gradbogen dis-seits des Nullpuncts, so muß er von allen beobach-



obachteten Winkeln abgezogen, wenn er aber auf die andere Seite des Nullpuncts fällt dazu addirt werden \*).

Weil man die beyden Sonnenbilder viel schärfer zur Berührung als zur Bedekung bringen kann, so kann man auch den Fehler des Index schärfer auf folgende Art bestimmen. Man mißt den Durchmesser der Sonne auf beyden Seiten des Nullpuncts, indem man die beyden Sonnenbilder zur Berührung bringt, sie alsdann durch Bewegung der Alhidade mittelst der Micrometer-schraube K F Fig. 29 übereinander gehen macht und sie ferner auch auf der andern Seite zur Berührung bringt. Findet sich der Durchmesser der Sonne auf beyden Seiten gleich grös, so ist der Fehler des Index  $= 0$ ; sind aber beyde Angaben von einander verschieden, so zieht man den kleinern Durchmesser von dem größern ab. Die Hälfte ist der gesuchte Fehler des Index, welcher additiv oder subtractiv ist, je nachdem man den Durchmesser der Sonne disseits des Nullpuncts kleiner oder größer findet als jenseits.

Beyspiel. d. 11. März 1794 fand ich den Durchmesser der Sonne mittelst eines 10 zolligen Sextanten disseits des Nullpuncts  
 $= 22$

\*) An den meisten Sextanten findet sich eine Vorrichtung den kleinen Spiegel zu drehen, wodurch man den Collimationsfehler verbessern kann. Wenn man aber gleich eine solche Vorrichtung hat, so ist es doch nicht rathsam, diese Correctionsschrauben oft zu berühren, weil dadurch leicht das ganze Instrument wandelbar werden kann.

$$\begin{array}{r} 22' 45'' \\ \text{jenseits} \quad = 41' 45'' \end{array}$$

$$\text{Unterschied} = 19' 00''$$

$$\text{Hälfte} = 9' 30''$$

Folglich war der Fehler des Index  $= 9' 30''$ ,  
und zwar additiv. Die halbe Summe von bey-

$$\frac{64' 30''}{2} = 32' 15'' \text{ ist der Durchmesser} \\ \text{der Sonne.}$$

### §. 69.

#### Untersuchung der gefärbten Gläser.

Wenn die gefärbten Gläser etwas prismatisch sind, so werden die auf sie auffallende Lichtstrahlen mit den ausgehenden nicht mehr parallel. Hat man also den Collimationsfehler vermittelt der Sonne bestimmt, so wird dieser vermittelt des Mondes oder eines andern sehr weit entfernten Gegenstandes, wo man die gefärbten Gläser zurücklegt, anders gefunden werden, als ihn die Beobachtungen an der Sonne angaben.

Am leichtesten und genauesten liesse sich dieser Fehler der gefärbten Gläser entdecken und bestimmen, wenn man die Gläser in ihren Fassungen um ihre Mittelpuncte drehen könnte. Denn wenn man den Fehler des Index bestimmt hat, und alsdann die Gläser um 180 Grade dreht, so wird der von den gefärbten Gläsern herrührende Fehler auf die andere Seite fallen, und der Fehler des Index um eben so viel grösser oder kleiner herauskommen, als er Anfangs zu klein oder zu gross  
ge-

gefunden wurde. Man fände also den Fehler der gefärbten Gläser sogleich aus der halben Differenz beyder Angaben. In den meisten Fällen kann man aber diesem Fehler begegnen. Wenn man z. B. eine Sonnenhöhe messen will, so darf man nur mittelst derselben gefärbten Gläser den Fehler des Index bestimmen, mittelst welcher man die Sonnenhöhe mißt, so hat der Fehler der gefärbten Gläser keinen Einfluß auf die beobachtete Höhe, weil er einerley GröÙe so wohl bey der Bestimmung des Fehlers des Index als bey Messung der Höhe behält, indem diese Gläser gegen die durch sie gehende Strahlen ihre Lagen nicht ändern.

Man könnte statt dieser gefärbten Gläser nur eines vor dem Ocular der Fernröhre anbringen, wenn es nicht Fälle gäbe, wo Winkel zwischen der Sonne und einem andern Gegenstand, z. B. des Mondes, eines Puncts auf der Erde, müssen gemessen werden. In diesem Fall darf man nur die von der Sonne kommenden Strahlen durch die gefärbten Gläser gehen lassen, und muß daher die Gläser y oder z verschieben, je nachdem man nach der Sonne geradezu siehet, oder ihr Bild durch gedoppelte Reflexion in das Sehefeld bringt. Und in eben diesen Fällen muß man sich auf den Parallelismus der beyden Flächen der gefärbten Gläser verlassen können.

### §. 70.

Wenn man die Gläser in ihren Fassungen nicht umdrehen kann, so muß man ihre Fehler

ler auf folgende Art zu bestimmen suchen. Vermittelt des Monds suche man den Fehler des Index ohne alle gefärbte Gläser, alsdann suche man denselben, nachdem man das hellste grüne Glas bey y, und hernach bey z vorgeschoben hat, so bekommt man den Fehler der Gläser bey y und z. Ebenso verfähre man mit den andern beyden dunklern grünen Gläsern. Wenn man nun den Fehler jedes einzelnen Glases auf diese Art gefunden hat; so suche man den Collimationsfehler, indem man die dunkeln braunen und die hellsten grünen Gläser gebraucht, vermittelt der Sonne. Dieser Fehler mit dem verglichen, den man ohne die gefärbten Gläser vermittelt des Monds gefunden hat, gibt den Fehler der beyden Gläser zusammen. Da man aber den Fehler für die grünen Gläser schon kennt, so kann man auch den Fehler der dunkeln Gläser bestimmen. Den beyden Bildern muß man jedesmal durch Bewegung der Fernröhre vermittelt der Schraube S gleiche Helligkeit zu geben suchen. *Borda* hat an seinem Reflexionskreis die gefärbten Gläser so angebracht, daß man sie umkehren und nach der im Anfang des 96. §. gezeigten Methode berichtigen kann \*). Die Gläser werden vermittelt viereckiger Zapfen in Fassungen eingesteckt; welche auf dem Körper des Instruments aufgeschraubt sind.

Be-

\*) Description et usage du cercle de reflexion pag. 17 et 23.

*Beschreibung des künstlichen Horizonts.*

§. 71.

Wenn man mit dem Sextanten zu Land Höhen messen will, so muß man dazu einen *künstlichen Horizont* haben, der die Stelle des natürlichen vertritt, welchen der Seefahrer in der weiten See findet. Die künstlichen Horizonte, welche man zu Beobachtungen auf dem festen Lande vorgeschlagen hat, beruhen auf folgendem. AB Fig. 38 Taf. IV seye die Ebene eines Planspiegels, der genau horizontal gelegt ist. Von der Sonne oder einem andern sehr entfernten Gegenstand falle ein Lichtstrahl SC auf den Spiegel. Dieser wird nach E so zurückgeworfen, daß der Winkel  $SCA = ECB$ , folglich ist, weil  $ACs = ECB$ , der Winkel SCs welchen der einfallende Strahl mit der Verlängerung des zurückgeworfenen macht, so groß, als die gedoppelte Höhe des Puncts S über dem Horizont. Zieht man von einem willkührlichen Punct E der Linie CE eine gerade Linie Eσ mit dem einfallenden Strahl CS parallel, so wird diese Linie, wenn die Entfernung des Gegenstands S von C sehr groß ist in Vergleichung mit CE, ebenfalls den Gegenstand S treffen. Dieses ist wirklich bey der Sonne der Fall, und man darf nur mit dem Sextanten den Winkel messen, welchen der geradezu von der Sonne kommende Lichtstrahl σE mit dem von dem Spiegel AB zurückgeworfenen macht, so hat man  $σEs = SCs =$  der gedoppelten Höhe.

## §. 72.

Es kommt also nur darauf an, eine ebene und genau horizontale Spiegelfläche zu erhalten. Was sich zu dieser Absicht zuerst darbietet ist die Oberfläche eines flüssigen Körpers. Wird ein flüssiger Körper in ein Gefäß gegossen, und gegen den Wind oder andere Erschütterungen gesichert, so nimmt seine Oberfläche von selbst eine horizontale Lage an, und gibt zugleich wie bekannt ist einen Spiegel. Der flüssige Körper, welcher gewöhnlich zu den künstlichen Horizonten gebraucht wird, ist Wasser oder Queksilber. Lezteres ist dem Wasser vorzuziehen, weil es einen bessern Spiegel macht, und seine wellenförmigen Bewegungen früher aufhören, wenn es ist erschüttert worden, als bey dem Wasser.

Zu dem hier beschriebenen Sextanten gehört folgender Apparat für einen Queksilberhorizont. Erstlich ein aus Mahoganyholz verfertigtes Gefäß in der Gestalt eines Parallelepipedums 4 Zolle lang, 3 Zolle breit und  $4\frac{1}{2}$  Lin. tief. In dieses wird das Queksilber durch einen papiernen Trichter gegossen. Zweytens ein Dach mit Plangläsern, welches über das mit Queksilber gefüllte Gefäß gestellt wird, um es gegen den Wind zu beschützen. Dieses Dach ist ein dreyseitiges Prisma, dessen Grundflächen rechtwinklichte und gleichschenklichte Dreyeke sind. Die Länge der Hypotenuse dieser Dreyeke ist 6 Z. 10 Lin., die Länge eines jeden Cathetus 4 Z.

4 Z. 11 Lin. Höhe der Prisma 4 Z. 4 Lin. Dieses sind die Abmessungen für die äußeren Seiten. Für die innere Höhlung sind die Abmessungen der genannten drey Dinge: 5 Z. 11 Lin.; 4 Z. 2 Lin.; 3 Z. 11 Lin. Die beyden einander rechtwinklicht schneidenden kleineren Seitenflächen haben Oefnungen von 3 Z. 5 Lin. Länge und 2 Z. 10 Lin. Breite, welche durch Plangläser verschlossen sind, die dritte Seitenfläche ist ganz offen. Dieses Dach wird über das Gefäß mit Queksilber, dessen längere Seite man nach dem Augenmaas in die Verticalebene gebracht hat, in welcher man einen Winkel messen will, welches bey der Sonne durch den Schatten des Gefäßes geschehen kann, so gestellt, daß der rechte Winkel gegen den Scheitelpunct gekehrt ist, die beyden Grundflächen aber mit der Verticalebene parallel sind, in welcher ein Winkel solle gemessen werden, wie man Fig. 38 Taf. IV siehet, wo die Linien ac, cb die beyden mit Plangläsern versehene Seitenflächen vorstellen.

### §. 73.

Man sieht leicht, daß die beyden Flächen der Gläser sehr genau eben und einander parallel seyn müssen, wenn die auffallenden Strahlen mit den ausgehenden parallel werden sollen, welches bey diesem künstlichen Horizont erfordert wird. Diese Gläser kann man leicht prüfen, wenn man eine Fernröhre mit einem Fadenkreuz nach einem deutlichen Gegenstand richtet, das Fadenkreuz genau auf einen gewissen Punct bringt, und nachsieht,



ob das Fadenkreuz noch auf diesen Punct trifft, wenn man das Planglas vor das Objectiv hält. Dieses kann leicht geschehen, weil das Dach so eingerichtet ist, daß man es auseinander legen kann. Es sind nemlich die beyden einander rechtwinklicht durchschneidenden Seitenflächen an ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie durch Leder mit einander verbunden; ebenso hängt jedes der beyden Dreycke mit einer jener Seitenflächen durch einen Streifen Leder zusammen. Daher kann man auch das ganze Dach so zusammenlegen, daß es sammt dem Gefäß für das Queksilber in ein Kistchen von 5 Z. 4 Lin. Länge 5 Z. Breite und 2 Z. Höhe geht. Wenn man das Dach so einrichtete, daß man die Gläser umkehren könnte, so fielen nach dem Umkehren die Fehler auf die entgegengesetzte Seite. Wird also eine Höhe in beyden Lagen der Gläser gemessen, so ist das arithmetische Mittel oder die halbe Summe beyder Angaben die *verbesserte* Höhe, der halbe Unterschied aber der Fehler der Gläser.

#### §. 74.

Mit dem bisher beschriebenen künstlichen Horizont kann man nur bey Windstillen oder schwachem Wind beobachten, und manche Beobachtung wird durch das Vorbeygehen eines Menschen, wenn dieses auch in einer Entfernung von 30 Schritten geschiehet, verdorben, weil die dadurch hervorgebrachte Erschütterung das Queksilber in Bewegung setzt. Daß die durch einen vorüberfahrenden Wagen her-

hervorgebrachte Erschütterung der Erde noch auf eine weit größere Entfernung in dem Queksilber des künstlichen Horizonts eine wellenförmige Bewegung, und daher ein verzerrtes Bild machen müsse, wird man aus dem vorhergehenden leicht abnehmen können. Diesem Fehler kann man einigermaßen dadurch abhelfen, daß man ein Planglas, dessen beyde Seitenflächen einander genau parallel seyn müssen, so auf das Queksilber auflegt und darauf schwimmen läßt, daß zwischen dem Glas und dem Queksilber keine Luftblase bleibt. Das Auflegen des Glases muß mit vieler Sorgfalt und auf folgende Art geschehen. Nachdem man reines Queksilber durch einen papiernen Trichter in das Gefäß gegossen hat, legt man darauf ein Stück sehr feines Papier und auf dieses das vorher rein abgewischte Glas. Nun drückt man mit der linken Hand das Glas ganz gelinde auf das Queksilber an, und zieht mit der rechten Hand das Papier darunter hinweg, so erhält man einen schönen schwimmenden gläsernen Spiegel. Herr *von Zach* hat mit H. Inspector *Köhler* in Dresden Untersuchungen über diese auf Queksilber schwimmende Spiegel angestellt, und gefunden, daß sie mancherley Veränderungen unterworfen sind. Es wurde das Fadenkreuz in der Fernröhre eines beweglichen Quadranten nach dem in dem Spiegel gesehenen Bild eines deutlichen Objects gerichtet, hierauf das Glas weggenommen, und von neuem aufgelegt. Das Fadenkreuz sollte nun, da indessen die Fernröhre unverrückt geblieben

ben war, wieder auf den vorigen Punct treffen; allein es fanden sich sehr merkliche Unterschiede. Wenn die beyden Flächen des Glases einander nicht genau parallel sind, so werden nicht allein die Strahlen gebrochen, sondern es senkt sich das Glas auch nicht überall gleich tief ein. Allein bey einem vollkommenen Parallelismus der beyden Flächen können doch noch sehr merkliche Fehler von der ungleichen Dichtigkeit des Glases und von kleinen Luftblasen herkommen, welche aller Sorgfalt ungeachtet noch öfters zwischen dem Glas und dem Queksilber übrig bleiben, und letzteres auf der Seite, auf welcher die Luftblase liegt, erheben. Ich habe gefunden, daß diese Luftblasen fest an dem Glas hängen bleiben, wenn man es gleich auf dem Queksilber bewegt. Man kann daher vermittelst eines solchen künstlichen Horizonts die wahren Höhen finden, wenn man zwey Beobachtungen macht, indem man das Glas um  $180^\circ$  dreht und das Mittel aus beyden nimmt, weil sich in diesem Fall die Fehler gegeneinander aufheben. Wenn man auf diese Art die Mittagshöhe der Sonne mißt, so muß man der in der Zwischenzeit der Beobachtungen geschehenen Veränderung der Höhe der Sonne Rechnung tragen, wie im folgenden wird gezeigt werden.

### §. 75.

Wenn man einen Planspiegel vermittelst einer Libelle genau horizontal stellte, so hätte man ebenfalls einen künstlichen Horizont,  
den

den man noch überdies so unterstützen könnte, daß er durch die Bewegung der Luft nicht leicht aus seiner Lage gebracht würde. Hier-  
 auf gründet sich der vom Herrn Grafen v. *Brühl* und Herrn v. *Zach* ausgedachte künstliche Horizont, wovon man die erste Nachricht in Herrn Bode's astronomischem Jahrbuch für 1788 S. 147. und eine vom Herrn von Zach gegebene ausführlichere Beschreibung in der Canzler- und Meisnerischen Quartalschrift für ältere Literatur und neuere Lectüre findet. Die Stelle des Spiegels vertritt eine auf der einen Seite matt geschliffene runde Platte von dunkelrothem oder blauem Glas. Diese liegt in der hölzernen Fassung Fig. 39 Taf. IV in einer eingedrehten Vertiefung auf 3 halbkugelförmigen eine Linie hohen Unterlagen *cd* so, daß ihre Oberfläche noch etwas über den Rand der Fassung hervorragt. Durch den vorstehenden Rand *AB* gehen drey hölzerne Schrauben, von denen man zwey bey *a* und *b* siehet. Zu diesem Horizont gehört eine genaue Libelle Fig. 40 mit drey Spizen deren eine zur Berichtigung der Libelle dient. Letztere siehet man in der Figur bey *g*, die beyden anderen sind bey *h* und *i*. An der prismatischen dreyseitigen Stange *ef* lassen sich zwey Zeiger *cd* hin und herschieben, um die Stelle der Luftblase *ab* zu bezeichnen. Will man nun den Horizont berichtigen, so setzt man die Libelle mit ihren drey Spizen auf die Glasplatte nach der Richtung zweyer Schrauben *a b* Fig. 39., bringt vermittelst jener Schrauben die Luftblase in die Mitte der Glas-  
 G 4 röhre,

röhre, und bezeichnet genau ihre Stelle mit den Zeigern *cd* Fig. 40. Hierauf wendet man die Libelle um; kommt die Luftblase wieder genau zwischen beyde Zeiger, so ist die Libelle berichtigt, und zugleich der Halbmesser der Glasplatte, über welchem die Libelle steht, horizontal, wo nicht, so verbessert man die eine Hälfte des Fehlers mittelst der Schrauben *ab* Fig. 39, die andere Hälfte mittelst der Schraube *g* Fig. 40. Bey dem Umwenden der Libelle muß die Luftblase wieder zwischen ihre Zeichen kommen, und im entgegengesetzten Fall die Operation wiederholt werden. Nun bringt man auch den Halbmesser, welcher auf ersterem senkrecht ist, in eine horizontale Lage, so ist die ganze Glasplatte horizontal.

#### §. 76.

Statt des hölzernen Tellers, auf welchen die Glasplatte gelegt wird, bedient sich jezo Herr von Zach eines von cararischem Marmor oder von Porcellainerde (sogenanntem Biscuit); letztere sind wohlfeiler und leichter. Die Libellen sind sehr empfindlich und geben bey  $\frac{1}{2}$  Minute Erhöhung einen Ausschlag von einer Linie \*). Es gibt welche, die gar keine Fassung haben und blos aus der mit Weingeist gefüllten an beyden Enden zugeschmolzenen Röhre bestehen. Diese ist ihrer Länge nach 3 Linien breit matt abgeschliffen; mit dieser schmalen mattgeschliffenen Fläche wird das Niveau oder die Libelle unmittelbar auf das Planglas gelegt, und auf diese Art der

künst-

\*) Was die Verfertigung einer guten Libelle betrifft, sehe man H. Hofr. Mayers pract. Geometrie II. Th. §. 153



**künstliche Horizont** vermittelt der Stellschrauben des Tellers nivellirt. Ein solches Niveau muß beym Mattschleifen schon adjustirt werden. Die Stelle der Luftblase wird durch Eintheilungen, die mit Flußspatsäure auf die obere convexe Fläche der Röhre eingätzt sind, bezeichnet. Diese Abtheilungen sind deswegen nothwendig, weil die Länge der Luftblase sich nach der verschiedenen Temperatur ändert. Ich sahe bey Herrn von Zach eine solche Libelle; sie hat vor der ersten den Vorzug, daß sie keiner Berichtigung vor jeder Beobachtung bedarf: Allein die untere mattgeschliffene Seite der Glasröhre so wie die Glasplatte des künstlichen Horizonts müssen auf das sorgfältigste gereinigt werden, weil das geringste Stäubchen merkliche Fehler bey Nivellirung des künstlichen Horizonts hervorbringen kann. Aus diesem Grunde hält Herr von Zach die oben beschriebene Libelle für sicherer. Bey dem Gebrauch der Libellen hat man sehr darauf zu sehen, daß nicht ein Theil der Glasröhre in dem Schatten bleibt, während der andere den Sonnenstrahlen ausgesetzt ist. Es entsteht in diesem Fall eine ungleiche Ausdehnung der Röhre, welche immer wieder neue Berichtigungen derselben nothwendig macht. Ich habe gefunden, daß, wenn man die Hand sehr nahe an die Glasröhre bringt, doch ohne sie zu berühren, die Luftblase sich nach der Seite hin bewegt, auf welcher die Röhre durch die Hand erwärmt, folglich erweitert wird. Hält man über eine den Sonnenstrahlen ausgesetzte

Libelle einen Körper, wodurch die Hälfte der Glasröhre beschattet wird, so bewegt sich die Luftblase augenblicklich gegen den von der Sonne beschienenen Theil hin. Hieraus lassen sich die Veränderungen erklären, die man an Libellen, welche an Quadranten angebracht waren, bemerkt hat \*).

### §. 77.

Es gibt noch eine andere Art von künstlichem Horizont, welcher eigentlich das gewöhnliche cirkelrunde Niveau ist. Es besteht aus einem cylindrischen messingenen Gefäß von ungefähr 3 Zollen im Durchmesser und  $1\frac{1}{2}$  Z. Höhe. An dem Boden dieses Gefäßes befinden sich drey messingene Stellschrauben. Dieses Gefäß wird mit Weingeist angefüllt und mit einem gläsernen Dekel verschlossen. Durch eine in dem Boden des Gefäßes angebrachte Öffnung kann man ein Paar Tropfen Weingeist herauslassen, da alsdann an dem Glasdekel eine kleine Luftblase entsteht, worauf die Öffnung des Bodens verschlossen wird. Bey dem Gebrauch wird das Gefäß so gestellt, daß die Luftblase in der Mitte des Dekels steht, wo sich ein Zeichen befindet. Die Oberfläche des Glases stellt alsdann den horizontalen Spiegel vor. Ich habe noch keine Versuche mit dieser Art künstlicher Horizonte gemacht. Herr von Zach setzt an ihnen aus, daß sie sehr schwer in eine horizontale Lage zu bringen seyen und dieselbige alle Augenblicke ändern, so wie die

mes-



messingene Schrauben und die übrigen metallenen Theile des Werkzeugs durch die Sonne erhitzt werden. Aus diesem Grunde hat auch Herr von Zach bey seinem künstlichen Horizont den Gebrauch der Metalle ganz vermieden.

*Höhenmessung vermittelt des Spiegel-  
sextanten.*

§. 78.

Man hält den Sextanten an seiner Handhabe P Fig. 29. mit der rechten Hand, die linke Hand bringt man an den Alhidadenhalter VW, um die Alhidade bewegen und zugleich den Sextanten unterstützen zu können, und richtet die Fernröhre nach dem Bild des Gegenstands, dessen Höhe man messen will, welches man in dem künstlichen Horizont siehet. Man bewegt nun den Sextanten um die Axe der Fernröhre, bis er ungefähr in eine Verticalebene kommt, macht den Alhidadenhalter los und bewegt die Alhidade bis man auch das Bild in dem Sehfeld hat welches durch die geradezu von dem Gegenstand auf den großen Spiegel fallende Strahlen gemacht wird. Nun stellt man die Alhidade fest, und bringt die beyden Bilder vermittelt der Micrometerschraube zur Bedekung und zwar in der Mitte des Sehfeldes oder zwischen den beyden Fäden, welche der Ebene des Sextanten parallel sind, so gibt die Alhidade die gedoppelte Höhe des Gegenstands, nachdem

man

man zuvor den Fehler des Index in Rechnung gebracht hat.

Wenn man eine Sonnenhöhe messen will, so muß man vorher die gefärbten Gläser vorschieben; zwey auf jeder Seite blenden die Sonne schon genug. Ich lasse gewöhnlich die mitlern weg. Hier ist es ebenfalls sehr vortheilhaft, die beyden Sonnenbilder nicht zur Bedekkung sondern zur Berührung zu bringen. Man bekommt alsdann die Höhe des obern oder des untern Sonnenrandes je nachdem das Bild, welches von den auf den großen Spiegel auffallenden Strahlen gemacht wird, über oder unter demjenigen sich befindet, das man in dem künstlichen Horizont geradezu durch die Fernröhre betrachtet, welches man leicht findet, wenn man sich hiezu eine Figur zeichnet und sich erinnert, daß die Fernröhre des Sextanten astronomisch ist \*).

### §. 79.

Aus der Theorie des Sextanten erhellet, daß, wenn man die Bilder einmal zur Berührung gebracht hat, sie sich auch noch berühren, wenn man den Sextanten so bewegt, daß seine Ebene immer in der Ebene der beyden Gegenstände, zwischen welchen man Winkel mißt, und des Auges, also hier in einer

\*) Wenn man beyde Bilder durch einerley Gläser blendet, so lassen sie sich nicht leicht von einander unterscheiden. Man darf aber nur die Hand vor den großen Spiegel halten, so wird das davon herkommende Bild verschwinden.

einer Verticalebene bleibt \*). Bewegt man hingegen den Sextanten um die Axe der Fernröhre, so beschreibt das reflectirte Bild (welches die auf den großen Spiegel auffallende Strahlen machen) einen Kreisbogen, und ein auf den großen Spiegel auffallender Lichtstrahl einen Kegel, dessen Spitze an dem Mittelpunkt des großen Spiegels ligt. Die Sonnenbilder also, welche einander bey einer verticalen Lage der Ebene des Sextanten berührten, werden bey dieser Bewegung auseinander gehen. Bey Höhenmessungen ist es daher am sichersten, dem Sextanten, indem man die Bilder zur Berührung bringen will, eine solche kleine Bewegung um seine Axe zu geben, man kann alsdann sehr leicht sehen, ob die beyden Bilder einander berühren, übereinander gehen oder gar nicht zur Berührung kommen. Wenn man auch die Axe der Fernröhre aus der Verticalebene der Sonne bringt, so erscheint das durch die von dem Horizont herkommende Strahlen gemachte Bild gegen dem Rande des Sehfelds hin, und der gemessene Winkel wird etwas fehlerhaft, wie in der Folge wird gezeigt werden.

Wer in der Behandlung solcher Instrumente noch nicht geübt ist, wird die beyden Bilder nicht leicht in das Sehfeld bringen, zumal wenn man sich der stärkern Vergrößerung bedient. Wenn man seine Polhöhe  
nur

\*) Für sehr nahe Gegenstände ist dieses nur alsdann wahr, wenn die Bewegung um die gemeinschaftliche Durchschnitts-Linie der beyden Spiegelebenen als um eine Axe geschieht.

nur bis auf funfzehn Minuten kennt, so kann man die Mittagshöhe der Sonne mit Zuziehung ihrer Abweichung bis auf so viel Minuten berechnen. Man stellt alsdann die Alhidade auf das gedoppelte dieser Hohe, so wird man, nachdem man die Fernröhre nach dem Sonnenbild in dem künstlichen Horizont gerichtet hat, durch Bewegung des ganzen Sextanten um die Axe der Fernröhre das andere Bild leicht in das Schefeld bekommen. Zur ersten Übung könnte man sich der bloßen Röhre (am Ende §. 64.) bedienen, wo die Bilder noch leichter können gefunden werden.

#### §. 80.

Zu mehrerer Bequemlichkeit könnte man sich ein kleines Stativ für den Sextanten machen lassen. Ludlam gibt Beschreibungen und Abbildungen von solchen Stativen in seinen *Directions for the use of Hadley's Quadrant* und in seinen *astronomical observations* pag. 62. Auf die Rückseite des Sextanten wird eine Axe parallel mit der Axe der Fernröhre angeschraubt. An einer verticalstehenden Axe läßt sich ein anderes Stük um eine horizontale Axe drehen, an welchem die Zapfenlager für die erste am Sextanten befestigte Axe angebracht sind. Durch diese Vorrichtung kann man also den Sextanten in die erforderliche Lage bringen; zu seiner Befestigung in dieser Lage sind Schrauben angebracht. Bey dem Gebrauch der größern Sextanten möchte ein solches Stativ bequem seyn, weil das Halten des Instruments mit freyen

freyer Hand etwas ermüdend ist. Ich habe bey einem kleinen vierzolligen Sextanten ein Stativ gebrauchen wollen, aber das Halten in freyer Hand bequemer gefunden. Über dem Aufstellen des Sextanten geht viele Zeit verloren, ein in der freyen Behandlung des Sextanten etwas geübter Beobachter kann indessen schon mehrere Höhen genommen haben.

*Verbesserung der Höhen wegen der Strahlenbrechung und Parallaxe.*

§. 81.

Es ist bekannt, daß die Lichtstrahlen eine Brechung leiden, wenn sie aus einem dünneren Mittel schief in ein dichteres übergehen, und daß aus diesem Grunde ein von einem Himmelskörper durch die gegen die Erde hin immer dichter werdende Atmosphäre zu dem Auge des Beobachters kommender Lichtstrahl immer mehr von seiner ersten Richtung abgelenkt wird, so daß er eine gegen den Mittelpunkt der Erde hohle krumme Linie beschreibt, die in der Ebene eines Verticalkreises ligt. Die Richtung, nach welcher der Beobachter den Stern sieht, ist also die Richtung der Tangente der krummen Linie an der Stelle, wo sich das Auge des Beobachters befindet. Eine gerade von dem Auge des Beobachters an den Stern gezogene Linie wird die Sehne jenes Bogens der krummen Linie seyn, und der Stern wird also dem Beobachter höher erscheinen, als er wirklich ist. Der Winkel zwischen jener Tangente der krummen Linie und

und ihrer Sehne heist die *astronomische Strahlenbrechung*, welche nicht nur von der Grösse des Winkels, unter welchem der Lichtstrahl auf die Atmosphäre auffällt, sondern auch von dem verschiedenen Zustand der Atmosphäre abhängt. Die für einen gewissen Stand des *Barometers* und *Thermometers* berechnete Strahlenbrechung heist die *mittlere*, welche nach der von den meisten Astronomen angenommenen *Bradleyschen* \*) Regel für die Barometerhöhe von 29,6 engl. oder 27,775 par. Zollen, und für 50° des *Fahrenheitischen* oder 8° des 80 theiligen Queksilberthermometers so gefunden wird: Es seye der scheinbare Abstand des Sterns vom Scheitel =  $z$ , die Strahlenbrechung =  $\epsilon$ , so ist

$$\sin(z - 5,9807 \epsilon) = 0,9983487 \sin z **)$$

Nach dieser Formel ist die dritte Tafel berechnet, vermittelst welcher die mittlere Strahlenbrechung für alle Höhen kann gefunden werden.

Um aus der mittlern Strahlenbrechung die *wahre* zu finden, gab T. Mayer im Jahr 1753 folgende mit allgemeinem Beyfall aufgenommene Regel an: *Die mittlere Strahlenbrechung für*

\*) Diese gründet sich auf das von *Simpson* (Mathematical Dissert.) entdeckte Gesetz der krummlinigten Bahn des Lichts, daß sich die Strahlenbrechungen in verschiedenen Höhen wie die Tangenten der um  $\frac{1}{4}$  der Brechungen verminderten Zenithdistanzen verhalten. Statt  $\frac{1}{4}$  nahm *Bradley* 1760 seinen Beobachtungen gemäß 3, und die mittlere Strahlenbrechung für 45° scheinb. Höhe = 57" an.

\*\*) De Zach tabulae motuum Solis. pag. 104.



für 28 Zoll Barometerhöhe und 10 Grad Wärme verändert sich bey 15 Lin. Veränderung des Barometers und bey 10 Grad Veränderung des reaumurschen Thermometers um den 22sten Theil ihrer Grösse. Borda \*) nahm ebenfalls diese Regel an, setzte aber den zu der Bradleyschen mitlern Strahlenbrechung gehörigen Stand des Barometers = 28 paris. Z. 3 Lin. und den Stand des 80 theiligen Queksilberthermometers =  $+ 12^{\circ}$ . Hienach berechnete er eine Tafel \*\*), welche Hr. von Zach genauer von neuem berechnet hat \*\*\*), und hier die IVte Tafel ist.

Tob. Mayer gab zu der Berechnung der wahren Strahlenbrechung folgende Formel an \*\*\*\*), in welcher  $\delta$  = dem scheinbaren Abstand vom Zenith,  $b$  = der Barometerhöhe in pariser Zollen ausgedrückt,  $t$  = der Anzahl Grade des Reaumurschen Thermometers über dem Gefrierpunct (die unter dem Gefrierpunct negativ):

$$\text{Refract.} = \frac{70,71 \cdot b \sin \delta}{\sqrt{(1 + 0,0046 \cdot t)^3}} \times$$

$$\left[ \sqrt{\left(1 + \frac{(16,5 \cos \delta)^2}{1 + 0,0046 \cdot t}\right)} - \frac{16,5 \cos \delta}{(1 + 0,0046 \cdot t)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$\text{oder, wenn } \text{Tang } \omega = \frac{(1 + 0,0046 \cdot t)^{\frac{1}{2}}}{16,5 \cos \delta}$$

Refr.

\*) Description et usage du cercle de Reflexion pag. 81.

\*\*) p. 2. Tab. II.

\*\*\*) Tabulae motuum Solis p. III.

\*\*\*\*) Tab. mot. Solis et Lunae. Londini MDCCLXX pag. 64.



$$\text{Refr.} = \frac{70,71 \text{ b. sin } \delta \text{ Tang } \frac{1}{2} \omega}{(1 + 0,0046. t)^{\frac{3}{2}}}$$

Hiebey ist noch zu bemerken, daß Mayer an seinem Queksilberthermometer den Raum zwischen dem Siedpunct und Gefrierpunct nicht in 80 sondern in  $82\frac{1}{2}$  gleiche Theile theilte, wie man an dem auf der Göttingischen Sternwarte befindlichen von Mayer 1755 gefertigten Thermometer siehet. Daß Mayer diese Thermometerscale in seiner Formel voraussetze, scheint mir aus folgender Ursache nicht unwahrscheinlich zu seyn. Der Coeffi-

cient  $\frac{1}{1 + 0,0046. t}$  drückt wie Mayer selbst

(Tab. mot. ☉ et ♃ pag. 65. Schol. II.) bemerkt, die Dichtigkeit der Luft aus. Setzt man  $t = 82,5$ , so wird die Dichtigkeit der

Luft  $= \frac{1}{1,3795} = \frac{1000}{1379\frac{1}{2}}$ , die für den Gefrier-

punct  $= 1$  gesetzt. Nach der auf den Mayerschen Thermometer befindlichen *Scala expansionum aeris* verhalten sich die Räume, welche ein gewisses Volumen von Luft bey dem *Gefrierpunct* und *Siedpunct* ( $212$  Fahrenheit,  $82\frac{1}{2}$  nach Mayer) einnimmt wie  $1000:1380$ , folglich ist die Dichtigkeit der Luft für  $212^{\circ}$  Fahrenh. ( $82^{\circ}\frac{1}{2}$  nach Mayer,  $80^{\circ}$  nach dem 80theiligen Queksilberthermome-

ter)  $= \frac{1000}{1380}$ , welches sehr nahe mit der aus

der Mayerschen Formel hergeleiteten Dichtigkeit der Luft zutrifft. Für die gewöhnlichen Grade des 80 theiligen Queksilberthermome-

mometers wäre der Coefficient von  $t = 0,00475$ , wenn die Dichtigkeit der Luft nach Mayer für den Gefrierpunct  $= 1$ , und für den Siedpunct  $= \frac{1}{1,380}$  gesetzt wird.

Je kleiner die Höhen sind, desto grösser wird die Strahlenbrechung, und zu gleicher Zeit auch der Einfluß der verschiedenen Modificationen der Atmosphäre auf dieselbige, weswegen auch die Gröse der Strahlenbrechung selbst für kleine Höhen nicht mehr mit der gehörigen Genauigkeit bestimmt werden kann, und kleine Höhen bey astronomischen Beobachtungen so viel als möglich ist vermieden werden. Weil für kleine Höhen die Strahlenbrechungen gros und ihre Unterschiede ungleich sind, so rath Mayer die Strahlenbrechung unmittelbar nach obiger Formel zu berechnen, anstatt sie durch Interpolation aus den Tafeln zu nehmen.

Wird die Strahlenbrechung von der beobachteten Höhe abgezogen oder zu der beobachteten Zenithdistanz addirt, so erhält man die wahre Höhe, wenn das Gestirn, dessen Höhe man genommen hat, so weit entfernt ist, daß man Linien nach demselben aus dem Mittelpunct der Erde und dem Punct ihrer Oberfläche, wo sich der Beobachter befindet, gezogen als *parallel* ansehen kann. Ist dieses nicht verstattet, so muß noch folgende Reduction der beobachteten Höhe vorgenommen werden.

## §. 82.

Es seye C. Fig. 52. Taf. VI. der Mittelpunct der Erde, O ein Punct auf ihrer Oberfläche, so trifft der verlängerte Halbmesser der Erde an den Punct O das Zenith Z, und ein durch das Zenith und den Mittelpunct der Erde C gelegter Kreis Hhsz ist ein Verticalkreis. In demselben befinde sich ein Himmelskörper S, so ist die Höhe dieses Puncts über dem Horizont Oh des Orts  $O = hOS$ , seine Höhe aus dem Mittelpunct der Erde betrachtet  $= HCS > hOS$ , und beyder Unterschied  $= OSC =$  der *Parallaxe der Höhe*, welche eine der Stralenbrechung entgegengesetzte Wirkung hervorbringt, ihn aber ebenfalls nicht aus dem Verticalkreis rückt. Nun verhält sich in dem geradlinigten Dreyek OCS,  $CS:CO = \sin COS:\sin OSC$

$$= \sin ZOS:\sin OSC$$

in dem bey O rechtwinklichten Dreyek COh verhält sich

$$\left. \begin{array}{l} Ch:CO \\ CS:CO \end{array} \right\} = \sin. \text{ tot.} : \sin ChO$$

folglich  $\sin. \text{ tot.} : \sin ChO = \sin ZOS : \sin OSC$

Der Winkel ChO heisst die *Horizontalparallaxe* ( $\pi$ ), ZOS ist der scheinbare Abstand vom Scheitel oder das Complement der scheinbaren Höhe h, folglich ist, wenn die Höhenparallaxe  $= q$  gesetzt wird

$$\sin q = \sin \pi \cos h'$$

oder, wenn der Winkel  $\pi$  klein ist

$$q = \pi \cos h'$$

Diese

Diese Formel setzt die scheinbare Höhe schon als bekannt voraus; ist aber der Winkel  $\pi$  sehr klein, wie dieses bey der Sonne der Fall ist, so kann man statt der scheinbaren Höhe die wahre  $h$  setzen. Bey dem Mond geht diese Näherung nicht mehr an, man muß daher den zuerst gefundenen Werth von  $q$  von der wahren Höhe  $h$  abziehen, um vermittelst dieser beynahe gefundenen scheinbaren Höhe die Parallaxe genauer zu bestimmen. Geradezu kann die Höhenparallaxe so gefunden werden; Es ist  $h' = h - q$ , also

$$\begin{aligned}\sin q &= \sin \pi \cos (h - q) \\ &= \sin \pi (\cos h \cos q + \sin h \sin q)\end{aligned}$$

$$\text{daher } \tan q = \sin \pi \cos h + \sin \pi \sin h \tan q$$

$$\text{folglich } \tan q = \frac{\sin \pi \cos h}{1 - \sin \pi \sin h}$$

Die V<sup>te</sup> Tafel gibt für verschiedene Höhen und für jeden Monat die Höhenparallaxe der Sonne an, wenn die mittlere Horizontalparallaxe  $= 8'',5$  gesetzt wird. Für die in der Tafel nicht befindlichen Höhen findet man die Höhenparallaxe leicht durch Interpolation, welche zu der schon wegen der Strahlenbrechung verbesserten Höhe addirt, oder von der Zenithdistanz abgezogen die wahre Höhe oder Zenithdistanz gibt.

### *Untersuchungen über die Fehler eines Spiegelsextanten.*

#### §. 83.

Um von der Genauigkeit, mit welcher man vermittelst eines Spiegelsextanten Winkel

kel messen kann, urtheilen zu können, muß man untersuchen, welchen Einfluß gewisse Fehler, die zum Theil in dem Bau des Sextanten liegen, zum Theil bey den Berichtigungen desselben begangen werden können, auf die Beobachtungen haben. Diese Untersuchungen werden zugleich dazu dienen, noch einige andere als die bisher gezeigten Prüfungen des Sextanten anzustellen. Zuerst will ich *den Fehler untersuchen, welcher daher entsteht, wenn die Axe der Fernröhre gegen die Ebene des Sextanten geneigt ist.* Um diese Untersuchung einfacher zu machen, schicke ich folgenden Lehrsatz voraus. Wenn auf einen Punct  $k$  Fig. 41 der Spiegelebene  $HI$  zween Lichtstrahlen  $Gk, gk$  auffallen, durch diese Strahlen eine Ebene  $AC$ , und durch ihre Durchschnittslinie  $AB$  mit der Ebene des Spiegels  $HI$  auf der andern Seite des Einfallsloths  $Ek$  eine zweyte Ebene  $AD$  so gelegt wird, daß diese Ebenen  $AD$  und  $AC$  auf beyden Seiten gleiche Winkel mit dem Einfallslot machen, so liegen beyde zurückgeworfene Strahlen in der Ebene  $AD$ , und ihre Winkel  $Gkg$  und  $Fkf$ , welche sie in beyden Ebenen mit einander machen, sind einander gleich.

*Beweis.* Es seye der Lichtstrahl  $Gk$  auf der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie  $AB$  der drey Ebenen  $HI, AC, AD$  senkrecht, so ist auch der zurückgeworfene  $Fk$  auf  $AB$  senkrecht, weil beyde in einer Verticalebene auf die Spiegelebene liegen. Man mache  $kF = kG$  und ziehe durch  $F$  und  $G$  die Linien  $DFf, CGg$  mit  $AB$  parallel, so liegen die Puncte  $Ff, Gg$   
in

in einer der Ebene des Spiegels parallelen Ebene. Da  $FkG$  eine Verticalebene auf die Ebene des Spiegels und  $ikF = ikG$  ist, so wird die durch  $F$  und  $G$  gezogene Linie durch das Perpendikel in zween gleiche Theile  $Fi$  und  $iG$  getheilt. Man ziehe  $gi$  und verlängere diese Linie in  $f$ , wo sie die Linie  $Dff$  schneiden wird. Da die Ebene durch jene Linie und durch  $k$  ebenfalls auf der Ebene des Spiegels senkrecht ist, so wird der zurückgeworfene Strahl von  $k$   $g$  in dieser Ebene liegen. Nun ist der Winkel  $Fif = Gig$ , der Winkel  $fFi = iGg$  weil  $Df$  und  $CG$  parallel sind, ferner  $Fi = iG$ , folglich  $fG = Gg$ ,  $fi = gi$ . Aber  $fik = gik$  weil beide rechte Winkel sind, und  $ki$  beyden Dreyeken  $ikg, ikf$  gemeinschaftlich, folglich der Winkel  $ikf =$  dem Winkel  $ikg$ ; also ist  $fk$  der zurückgeworfene Strahl von  $g$ . Es ist aber auch  $fk = gk$ ,  $Fk = Gk$  und  $Ff = gG$ , folglich  $Fkf = Gkg$ . Auf ähnliche Art kann dieses von jedem andern in der Ebene  $AC$  liegenden auf  $K$  fallenden Lichtstrahl gezeigt werden; folglich liegen alle in der Ebene  $AC$  auf dem Punct  $k$  fallende Lichtstrahlen nach der Zurückwerfung in der Ebene  $AD$  und machen in beyden Ebenen mit  $Gk$  und  $fk$ , also auch die zusammengehörige unter sich gleiche Winkel.

#### §. 84.

$AB$  und  $CD$  Fig. 42 seyen die Spiegel des Sextanten, beyde auf seiner Ebene senkrecht, in welcher die Linien  $HG, GF, FE$  so gezogen sind, daß  $DFE = dFG$ ;  $FGB = bGH$ , wenn

$H$  4

$bB$

**bB** und **dD** die Durchschnittslinien der Ebene des Sextanten sind. Ist also **HG** ein Lichtstrahl, so wird dieser nach einer gedoppelten Reflexion in die Lage **FE** kommen. Durch die Linien **HG**, **GF** und **FE** lege man die Ebenen **hHGI**, **fFGi**, **FfE** senkrecht auf die Ebene des Sextanten, erstere schneiden die Spiegel in den Linien **Gi** und **Ff**, welche ebenfalls auf des Sextanten Ebene senkrecht seyn werden. Die Linie **FE** ist diejenige, mit welcher die Axe der Fernröhre parallel seyn muß. Nun seye aber die Axe der Fernröhre die Linie **fE** welche mit des Sextanten Ebene den Winkel **fEF** macht. Zieht man durch den Punct **f**, wo die verlängerte Axe der Fernröhre den kleinen Spiegel **CD** trifft, die Linie **fg** mit **FG** parallel, und macht in der Ebene **fgGF** den Winkel **gfi** = dem Winkel **FEf**, so wird nach dem 83. §. ein Lichtstrahl **if** durch Zurückwerfung von dem Spiegel **CD** in die Lage **fE** gebracht. Zieht man ferner **hi** mit **HG** parallel, und macht in der Ebene **HGih** den Winkel **hik** = dem **ifg** = **FEf**, so wird ein Lichtstrahl **ki** nach **if**, und von da aus nach **fE** zurückgeworfen. Folglich wird man durch die Fernrohre zugleich zween Gegenstände sehen, welche nicht in der Ebene des Sextanten liegen, wenn man beyde in der Axe der Fernröhre zur Berührung bringt, und der Winkel, welchen man mißt, ist der Winkel, welche die um gleiche Winkel **FEf** und **hik** gegen die Ebene des Sextanten geneigte Linien **ki** und **fE** mit einander machen, Die Alhidade gibt aber den Winkel der Linien



nien HG und FE an, welcher dem gedoppelten Neigungswinkel heyder Spiegel gleich ist, Der Winkel kih bleibt derselbe, so lange FEf sich nicht ändert, folglich liegen alle Strahlen auf der Oberfläche eines Kegels, der durch die Umdrehung der Linie ki um die Axe Gi beschrieben wird, wenn man den Spiegel um seine Axe dreht. Man findet also in diesem Fall mit dem Sextanten alle Winkel zu groß, und die Berechnung des Fehlers reducirt sich auf die Auflösung der Aufgabe: Die beyden Schenkel eines Winkels haben gleiche gegebene Neigung gegen eine gegebene Ebene; durch sie stehen Ebenen senkrecht auf dieser Ebene, und machen mit einander einen gegebenen Winkel; man sucht den Winkel, welchen die beyden schiefen Schenkel mit einander machen; Oder in einem sphärischen Dreyek sind zwey gleiche Seiten sammt dem eingeschlossenen Winkel gegeben, man sucht die dritte Seite. Diese Aufgabe ist die umgekehrte der allgemeiner in Herrn Hofrath Kästners astron. Abhandlungen I. Samml. S. 35. n. 168. u. f. Wenn nach 186 der angeführten Abhandl. der eingeschlossene Winkel  $\alpha$ , die ihm gegenüberstehende Seite  $\delta$ , die beyden andern Seiten  $p$  und  $q$  heißen, so ist

$$\cos \alpha = \frac{\cos \delta - \sin p \sin q}{\cos p \cos q}$$

aber hier  $p = q =$  der Neigung der Fernröhre

$$\text{also } \cos \alpha = \frac{\cos \delta - \sin p^2}{\cos p^2}$$

daher

daher  $1 - \cos \delta = \cos p^2 (1 - \cos \alpha)$   
 folglich  $2 \sin \frac{1}{2} \delta^2 = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha^2 \cos p^2$ , weil  $1 - \cos \delta = 2 \sin \frac{1}{2} \delta^2$  u. s. w.

und wenn man auf beyden Seiten mit 2 dividirt und die Wurzel auszieht

$$\sin \frac{1}{2} \delta = \cos p \sin \frac{1}{2} \alpha.$$

Wenn also die Neigung der Fernröhre gegen die Ebene des Sextanten  $= p$  ist, so findet man aus dem Winkel  $\alpha$  welchen die Alhidade angibt, den Winkel, welchen man wirklich gemessen hat, auf folgende Art. Es seye  $p = 10$  Min.,  $\alpha = 140^\circ$  so ist  $\text{Lg} \sin \frac{1}{2} \alpha = 9,9729858$

$$\text{Lg} \cos p = 9,9999982$$

$$\text{Lg} \sin \frac{1}{2} \delta = 9,9729840$$

$$\frac{1}{2} \delta = 69^\circ 59' 57'',6$$

$$\delta = 139^\circ 59' 55,2$$

folglich hätte in diesem Fall die Alhidade den Winkel zu gros angegeben um 4,8 Sec.

### §. 85.

Aus der Formel des vorhergehenden §.

$$\cos \alpha = \frac{\cos \delta - \sin p^2}{\cos p^2}$$

folgt ferner  $\cos \delta - \cos \alpha = \sin p^2 (1 - \cos \alpha)$   
 es ist aber

$$\cos \delta - \cos \alpha = 2 \sin \left( \frac{\alpha - \delta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha + \delta}{2} \right)$$

$$\text{und } 1 - \cos \alpha = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha^2$$

folglich

$$\sin \left( \frac{\alpha - \delta}{2} \right) \sin \left( \frac{\alpha + \delta}{2} \right) = \sin p^2 \sin \frac{1}{2} \alpha^2$$

wenn

wenn nun  $\delta$  von  $\alpha$  nur wenig unterschieden ist, so kann man  $\frac{\alpha + \delta}{2} = \alpha$ , folglich

$$\sin \frac{\alpha + \delta}{2} = \sin \alpha = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha \text{ setzen, so}$$

bekommt man wenn auf beyden Seiten mit  $2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha$  dividirt wird

$$\sin \frac{\alpha - \delta}{2} = \frac{\sin p^2 \sin \frac{1}{2} \alpha^2}{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \cos \frac{1}{2} \alpha} = \frac{1}{2} \sin p^2 \tan \frac{1}{2} \alpha$$

oder weil  $\frac{\alpha - \delta}{2}$  sehr klein ist, wenn man  $p$  klein annimmt

$$\alpha - \delta = \sin p^2 \tan \frac{1}{2} \alpha \approx p^2 \tan \frac{1}{2} \alpha$$

In dieser Formel muß  $p$  in Theilen des Halbmessers ausgedrückt werden, weil das Quadrat davon vorkommt. Ist  $p$  in Secunden gegeben, so findet man  $p$  in Theilen des Halbmessers

$$= \frac{p \cdot \pi}{648000}, \text{ wenn } \pi \text{ den Umfang des}$$

Kreises in Theilen des Durchmessers oder den halben Umfang in Theilen des Halbmessers und 648000 die Anzahl Secunden sind, die auf den Bogen von 180 Graden gehen. Da findet man also  $\alpha - \delta$  in Theilen des Halbmessers

$$= \frac{p^2 \pi^2}{(648000)^2} \tan \frac{1}{2} \alpha$$

Um diesen Bogen wieder in Secunden zu verwandeln, muß man mit  $\frac{648000}{\pi}$  multipliciren, folglich findet man

$$\alpha - \delta = \frac{\pi}{648000} p^2 \tan \frac{1}{2} \alpha, \text{ wo } p \text{ und}$$

$$\alpha - \delta$$

$\alpha - \delta$  in Secunden ausgedrückt sind. Nun ist

$$\text{Lg} \pi = 0,4971499$$

$$\text{Lg} 648000 = 5,8115750$$

$$\text{Lg const.} = 0,6855749 - 6 = \text{Lg } e^*).$$

Setzt man wie §. 84.  $p = 10 \text{ Min.} = 600 \text{ Sec.}$  und  $\alpha = 140^\circ$ , so wird

$$\text{Lg } p^2 = 2 \text{Lg } p = 5,5563025$$

$$\text{Lg } \tan \frac{1}{2} \alpha = 0,4389341$$

$$\text{Lg } e = 0,6855749 - 6$$

$$\text{Lg } (\alpha - \delta) = 0,6808115$$

$$\alpha - \delta = 4'',795 \text{ oder } = 4'',8$$

wie §. 84.

Hienach kann man eine Tafel berechnen, welche für verschiedene Neigungen der Fernröhre gegen die Ebene des Sextanten und für alle Winkel, die mit dem Sextanten gemessen werden können, ihre Verbesserung von 10 zu 10 Graden angibt. Eine solche Tafel findet sich in *Borda's Description et usage du cercle de Reflexion Table V.* für die Neigungen oder deviationen von 10 bis 60 Min. und für die Winkel von 0 bis 180° von 10 zu 10 Graden. Wenn  $\alpha$  sehr nahe an 180 Grade kommt, kann man die hier gegebene Näherungsformel nicht mehr gebrauchen, die Rechnung muß alsdann nach der Formel §. 84. geführt werden. Bey einem Sextanten ist die Näherungsformel genau genug, weil mit diesen Instrumenten höchstens Winkel von 140 Graden gemessen werden können. Die Bordasche Tafel ist hier Taf. II.

§. 86.

\*) Kästners astron. Abhandlungen. I. Samml. S. 18. n. 98.

## §. 86.

Wenn die Axe der Fernröhre mit der Ebene des Sextanten parallel ist, die Bilder aber nicht in der durch die Axe der Fernröhre gehenden jener Ebene parallelen Linie zu Berührung gebracht werden, so kann man ebenfalls den Fehler, welcher hieraus entsteht, nach §. 84. und 85. berechnen, wenn man weiß, wie groß die Neigung dieser Visirlinie gegen des Sextanten Ebene war. Man bestimmt diese Neigung vermittelt der beyden Fäden der Fernröhre, welche mit der Ebene des Sextanten parallel seyn müssen; vorher aber muß man den Abstand der Fäden in Kreistheilen wissen, das heist, man muß wissen, wie groß der Winkel ist, welchen Ebenen durch den Mittelpunkt des Objectivs und die Fäden gelegt mit einander machen. Man könnte diesen Winkel aus der Brennweite des Objectivs und aus dem Abstand der Fäden berechnen. Bequemer und sicherer kann man ihn auf folgende Art bestimmen. Man stellt die Fäden durch Umdrehung der Ocularröhre auf die Ebene des Sextanten senkrecht, und legt ihn horizontal. Hierauf richtet man die Fernröhre so nach einem nahe an dem Horizont liegenden deutlichen Punct, daß der eine Faden jenen Punct bedeckt. Man bemerke den Winkel, welchen die Alhidade angibt, wenn das directe und reflectirte Bild desselben Puncts einander deken. Nun bewege man die Alhidade vermittelt der Micrometer-schraube, so wird man zwey Bilder desselben Puncts sehen. Indem man nun das eine Bild

an dem einen Faden behält, bringt man durch Bewegung der Alhidade das andere Bild an den andern Faden. Der Winkel, welchen die Alhidade indessen beschrieben hat, ist der gesuchte Winkel. *Beyspiel.* Mit obigem Sextanten fand ich, als beyde Bilder eines Stabes in einer Entfernung von ungefähr 400 Fuß einander bedekten, den Winkel  $= 0^{\circ} 0' 30''$ . Ich brachte das Bild des Stabes an den Faden welcher gegen dem Mittelpunkt des Sextanten hinlag, und fand, nachdem ich durch Bewegung der Alhidade das andere Bild an den zweyten Faden gebracht hatte, den Winkel  $= 1^{\circ} 24' 0''$  und zwar jenseits des Nullpuncts oder auf dem *Excedens*, daher Abstand der Fäden  $= 1^{\circ} 24' 30''$ . und eines jeden Abstand von der Axe der Fernröhre  $= 0^{\circ} 42' 15''$ . Nach dieser Operation werden die Fäden wieder der Ebene des Sextanten parallel gestellt. Gesezt nun, man hätte einen Winkel  $97^{\circ} 23'$  gemessen, indem man die Bilder an dem einen Faden in Berührung brachte; so wäre die Deviation  $= 42'$  (auf Secunden braucht man hier nicht zu sehen). Nun findet man für  $40'$  Diviation in Taf. II und für  $95^{\circ}$  beob. Winkel die Verbesserung  $= 31''$ , für  $100^{\circ} = 34''$ , also für  $97^{\circ} \frac{1}{3}$   $32'',4$ . Wenn die Diviation um 5 Min. wächst, so nimmt in der Tafel die Verbesserung um  $8''$  zu, also für  $2'$  um  $3'',2$ ; folglich ist die gesuchte Verbesserung  $= 32'',4 + 3'',2 = 35'',6$ , welche von dem beobachteten Winkel abgezogen werden müssen. Wenn man die Bilder nicht an einem Faden in Berührung-

rührung oder zur Bedekung bringt, so läßt sich die Deviation durch Schätzung bestimmen.

### §. 87.

Wenn man einen Winkel mißt, indem man die Bilder an einem Faden in Berührung bringt, und nun den Sextanten so neigt, daß die Bilder sich an dem andern Faden befinden, so müssen sich die Bilder wieder berühren, wenn die Axe der Fernröhre der Ebene des Sextanten parallel ist, weil alsdann die Fehler gleich sind auf beyden Seiten, da beyde Deviationen gleich groß sind. Dieses gibt also ein neues Mittel ab die Lage der Fernröhre zu berichtigen (§. 67.). Die Neigung der Axe der Fernröhre seye  $x$ , der Winkel, welchen die Alhidade angibt, wenn man die Bilder an dem einen Faden in Berührung bringt,  $a$ , an dem andern Faden  $\alpha$ , der Abstand der Fäden  $=\delta$ , so ist die Verbesserung

$$y \text{ für den ersten Fall} = e \left( \frac{\delta}{2} + x \right)^2 \tan \frac{1}{2} a,$$

$$\text{für den zweyten } z = e \left( \frac{\delta}{2} - x \right)^2 \tan \frac{1}{2} \alpha \text{ nach}$$

§. 85. \* Nun ist  $y - z$  gegeben, welches der Winkel ist, um welchen die Alhidade bewegt werden muß, wenn man, nachdem die Bilder an dem einen Faden in Berührung gebracht worden sind, sie auch an dem andern zur Berührung bringen will. Also hat man

$$y - z = e \left( \frac{\delta}{2} + x \right)^2 \tan \frac{1}{2} a - e \left( \frac{\delta}{2} - x \right)^2 \tan \frac{1}{2} \alpha,$$

oder weil  $a$  und  $\alpha$  nur wenig von einander verschieden seyn können

$$y - y$$



$$y-z = e \tan \frac{1}{2} a \left( \left( \frac{\delta}{2} + x \right)^2 - \left( \frac{\delta}{2} - x \right)^2 \right) \\ = e \tan \frac{1}{2} a \cdot 2 \delta x$$

$$\text{folglich } x = \frac{y-z}{2 e \delta \tan \frac{1}{2} a}$$

Der kleinere Winkel gehört immer zu demjenigen Faden, welcher am wenigsten von der Ebene des Sextanten abweicht. Gesezt man hätte einen Winkel bey Berührung der Bilder an dem einen Faden = 140 Gr. an dem andern = 140° 1' 17" gefunden, so liegt letzterer Faden am weitesten von einer, durch den Mittelpunkt des Objectivs, der Ebene des Sextanten parallel gelegten Ebene. Es seye der Abstand der Fäden = 1° 20' = 4800 Sec. so ist

$$\begin{aligned} \text{Lg } 2d &= 3,9822712 \\ \text{Lg } e &= 0,6855749 - 6 \\ \text{Lg } Tg. \frac{1}{2} a &= 0,4389341 \\ \hline &0,1067802 = 1 \\ \text{Lg}(y-z) &= 1,8864907 \\ \hline \text{Lg } x &= 2,7797195 \\ x &= 602'', 1 = 10' 2'' \end{aligned}$$

*Fehler wenn der grofse Spiegel nicht senkrecht steht auf des Sextanten Ebene.*

### §. 88.

Wenn der grofse Spiegel mit der Ebene des Sextanten einen schiefen Winkel macht, und man berichtigt den kleinen Spiegel nach §. 66., so wird seine Ebene der des grofsen Spiegels parallel. Berichtigt man alsdann ferner die Axe der Fernröhre nach §. 81., so wird

wird sie der Ebene des Sextanten nicht parallel werden, sondern in einer Ebene liegen, welche den großen und kleinen Spiegel senkrecht durchschneidet. Nun nehme ich beyde Spiegel einander parallel aber gegen des Sextanten Ebene geneigt an; die Axe der Fernröhre seye in einer Ebene, welche beyde senkrecht durchschneidet. Es fragt sich, was für ein Fehler aus der Spiegel Neigung gegen des Sextanten Ebene in dem Winkelmessen entstehe?

Der Neigungswinkel beyder Spiegel wird durch den Winkel gemessen, welchen die auf dieselbige gefällte Perpendikel mit einander machen. Ist nun der Spiegel gegen die Ebene des Instruments geneigt, so beschreibt das Perpendikel keinen größten Kreis, sondern die Oberfläche eines Kegels, dessen Axe auf jene Ebene senkrecht ist. Folglich gibt die Alhidade den Neigungswinkel beyder Spiegel, und also auch den Winkel, welchen man messen will, zu groß. Der Spiegel weiche von der senkrechten Lage ab um den Winkel  $q$ , die Alhidade zeige einen Winkel  $\alpha$ , so findet man beyder Spiegel Neigungswinkel  $\lambda$  nach §. 84.

$\sin \frac{1}{4} \lambda = \cos q \sin \frac{1}{4} \alpha$ , weil der Winkel  $\alpha$  der gedoppelte Winkel ist, um welchen die Alhidade bewegt wurde.

$$\text{oder nach §. 83. } \frac{\alpha - \lambda}{2} = e q^2 \tan \frac{1}{4} \alpha$$

$$\text{daher } \alpha - \lambda = 2 e q^2 \tan \frac{1}{4} \alpha$$

Man kann also diesen Fehler ebenfalls vermittelst der zweyten Tafel finden. Man sucht die

zu der Hälfte des Winkels, welchen die Alhidade angab, und zu der gegebenen Neigung des großen Spiegels gehörige Verbesserung, und nimmt das gedoppelte davon, so hat man die gesuchte Verbesserung des beobachteten Winkels. Zum Beyspiel. Es seye die Neigung des großen Spiegels  $= 10'$ , die Alhidade gebe den Winkel  $130$  Gr. So ist die zu  $65$  Gr. gehörige Verbesserung  $= 1''$ , also Verbesserung des Winkels  $= 2''$ . Der Fehler also welcher aus des Spiegels Neigung gegen die Ebene des Instruments entstehen kann, beträgt viel weniger, als der, welcher aus der Deviation der Fernröhre entsteht. Nach der Methode des §. 65. kann man gewiß den großen Spiegel so berichtigen, daß man bis auf  $3$  Min. von seiner richtigen Lage versichert seyn kann, folglich hat man hievon keine Fehler in dem Winkelmessen zu befürchten, welche bey einem Werkzeug von dieser Größe könnten bemerkt werden.

*Fehler, wenn der kleine Spiegel auf der Ebene des Sextanten nicht senkrecht steht.*

### §. 89.

Ich nehme an, der große Spiegel stehe auf des Sextanten Ebene senkrecht, der kleine aber weiche von der verticalen Lage um den Winkel  $r$  ab, so wird ein Lichtstrahl, der in der Ebene liegt, welche der des Sextanten parallel ist, von dem kleinen Spiegel so zurück-

rückgeworfen, daß er mit jener Ebene einen Winkel macht, der auf folgende Art bestimmt wird. Wenn Fig. 41 HI der kleine Spiegel, die Ebene durch FG und k auf des Spiegels Ebene senkrecht, die durch Dg und k der Ebene des Sextanten parallel ist, so ist  $ikl =$  des Spiegels Abweichung von seiner verticalen Lage  $= r$ ; der Lichtstrahl wird also, wenn er in der Ebene durch Dg und k in der Richtung gk einfällt, nach f so zurückgeworfen, daß  $Gkg = Fkf$  (§. 82.), folglich des zurückgeworfenen Strahls Winkel mit der Ebene des Instruments

$$= Dkf = 2Gkg. \quad \text{Es ist aber } \sin ikl = \frac{li}{lk}$$

$$= \frac{li}{gk \cos lkg} = \frac{Gg}{gk \cos lkg} = \frac{\sin Gkg}{\cos lkg};$$

oder weil der Winkel ikl sehr klein ist,  $ikl \cos lkg = Gkg$ . Also des zurückgeworfenen Lichtstrahls Neigung gegen des Sextanten Ebene  $= 2ikl \cos lkg = 2r \cos lkg$ . Wenn man also gleich den Sextanten in die Ebene der beyden Gegenstände bringt, zwischen welchen man Winkel messen will, so wird doch der von den Spiegeln zurückgeworfene Strahl beständig mit des Sextanten Ebene einen Winkel machen, der so groß ist als  $2r \cos lkg$ , weil klg von beständiger GröÙe bleibt (dieser Winkel ist bey dem hier beschriebenen Sextanten  $= 15^\circ$  §. 64. Der wahre Winkel ist also die Hypotenuse eines rechtwinklichten sphärischen Dreyeks, dessen Perpendikel die Winkel  $2r \cos 15^\circ$  und  $\alpha$  sind, wenn hier wieder  $\alpha$  der Winkel heißt, welchen die Al-

hidade angibt. Setzt man den verbesserten Winkel  $= \gamma$ ,  $2r \cos l k g = \varphi$  so hat man  $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \varphi$ .

Man sieht leicht, daß dieser Fehler nur bey kleinen Winkeln in Betrachtung kommen kann. Es seye  $\alpha = 30'$

$$\varphi = 2$$

dieses Dreyek kann man als geradlinigt betrachten, folglich ist

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \varphi^2 = 904$$

$$\text{daher } \gamma = \alpha + \frac{\varphi^2}{2\alpha} = 30', 0666 = 30 \text{ Min. } 4 \text{ Sec.}$$

Für  $\alpha = 60'$  wird  $\gamma^2 = 3604$

$\gamma = 60, 0333 = 60 \text{ Min. } 2''$  Der Fehler nimmt also mit dem Wachsen der Winkel sehr schnell ab. Uebrigens sieht man aus dem ersten Beyspiel, daß man den kleinen Spiegel genau berichtigen muß, wenn man den Durchmesser der Sonne vermittelst des Sextanten bestimmen will. Die Berichtigung des Spiegels kann aber sehr leicht und bis auf 30 Sec. genau nach §. 66. geschehen.

*Fehler, welche entstehen, wenn die beyden Flächen der gläsernen Spiegel einander nicht parallel sind.*

§. - 90.

Wenn die beyden Flächen eines gläsernen Spiegels gegeneinander geneigt sind, so kann man sich diese Flächen erweitert gedenken, bis sie einander schneiden. Die Durchschnittsline beyder Flächen wird entweder auf des Sextanten Ebene senkrecht stehen, oder derselben parallel seyn, oder einen schiefen Winkel

kel damit machen. Steht die Durchschnitts-  
linie senkrecht auf der Ebene des Sextanten,  
so seye Fig. 43 BbeE der Durchschnitt des  
Spiegels mit einer Ebene, welche der Ebene  
des Sextanten parallel gelegt ist. Die Linien  
Bb und Ee verlängert werden einander schnei-  
den in A unter einem Winkel, welcher so  
groß ist als der Neigungswinkel der beyden  
Spiegelflächen. Ein Lichtstrahl HC, der in  
jener Ebene liegt, und auf den Spiegel in k  
auffällt, bleibt nach seiner Brechung nach D  
hin in jener Ebene, wird von dem hintern be-  
legten Theil des Spiegels nach D in derselben  
Ebene zurückgeworfen, bey C wieder gebro-  
chen, so daß er nach der Richtung CH fort-  
geht, welche wieder in der parallelen Ebene  
des Sextanten liegt. Man ziehe an die Punkte  
k und C die Einfallslothe LK, FC auf die for-  
dere Fläche des Spiegels, und verlängere sie  
in l und f, so ist  $lkD = DCf - 2BAE$  oder  
 $LKM = FCG - 2BAE$

ferner  $\sin LKM : \sin LKI = n : m$  (§. 53.)

und  $\sin FCG : \sin FCH = n : m$

$$\text{also } \sin LKI = \frac{m}{n} \sin LKM = \frac{m}{n} \sin (FCG - 2BAE)$$

$$\text{und } \sin FCH = \frac{m}{n} \sin FCG$$

zieht man beyde Gleichungen von einander  
ab, so wird

$$\begin{aligned} \sin FCH - \sin LKI &= \frac{m}{n} (\sin FCG - \sin (FCG - 2BAE)) \\ &= \frac{m}{n} (\sin FCG - \sin FCG \cos 2BAE + \cos FCG \sin 2BAE) \\ &= \frac{m}{n} (\sin 2BAE \cos FCG + 2 \sin BAE^2 \sin FCG) \end{aligned}$$

Wenn nun  $BAE$  nur einige Minuten beträgt, so kann man  $\sin 2BAE = 2BAE$  setzen, und das Quadrat davon weglassen;  $\sin FCH - \sin LKI$  ist gleich  $2 \cos \left( \frac{FCH + LKI}{2} \right) \sin \left( \frac{FCH - LKI}{2} \right)$  wo man wieder  $\frac{FCH + LKI}{2} = FCH$  und  $\sin \frac{FCH - LKI}{2} = \frac{FCH - LKI}{2}$  setzen darf

$$\begin{aligned} \text{also } FCH - LKI &= \frac{2m}{n} BAE \frac{\cos FCG}{\cos FCH} \\ &= \frac{2BAE \sqrt{(m^2 - n^2 \sin FCH^2)}}{n \cos FCH} \end{aligned}$$

Der Lichtstrahl  $HC$  wird also so zurückgeworfen, als ob er auf die Ebene eines Spiegels aufgefallen wäre, die mit der fordernden Fläche des Spiegels  $BbE$  einen Winkel machte, so groß als  $\frac{BAE \sqrt{(m^2 - n^2 \sin FCH^2)}}{n \cos FCH}$ . Setzt man

$$\begin{aligned} m=3, n=2 \text{ so wird dieser Winkel} \\ &= \frac{BAE \sqrt{(9 - 4 \sin FCH^2)}}{2 \cos FCH} \end{aligned}$$

$$\text{oder } x = \frac{3}{2} BAE \sec. FCH \sqrt{(1 - \frac{4}{9} \sin FCH^2)}$$

Dieser Winkel ist also veränderlich, und nimmt mit dem Winkel  $FCH$  zu, denn  $\sin(FCH)^2$  kann nicht größer werden als 1 und  $\sec. FCH$  über alle Gränzen wachsen. Man kann sich also vorstellen, die auf den großen Spiegel auffallende Lichtstrahlen werden von einem Spiegel zurückgeworfen, der ausser der

Bewe-



Bewegung, die man ihm mittelst der Alhidade gibt, noch eine eigene Bewegung auf der Alhidade selbst um die Axe des Sextanten hätte, welche von der Aenderung des Winkels  $x$  abhängt. Diese Bewegung geschieht nach derselben Richtung nach welcher man den grossen Spiegel bewegt, wenn der dikere Theil desselben gegen den Gradbogen hin liegt, nach der entgegengesetzten Richtung, wenn der dikere Theil von dem Gradbogen an gerechnet jenseits des Mittelpuncts des Sextanten liegt, oder der einfallende Lichtstrahl und der dünnere Theil des Spiegels auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpuncts liegen. Im ersten Fall findet man die Winkel zu klein, im letztern zu groß, und zwar um die gedoppelte Aenderung des Winkels  $x$ .

### §. 91.

Bey dem oben beschriebenen Sextanten ist  $FCH = 5^\circ$  wenn beyde Spiegel einander parallel sind. Es seye  $BAE = \frac{1}{2} = 30''$ , so läßt sich  $x$  auf folgende Art berechnen.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Lg } 2 & = & 0,3010300 \\
 \text{Lg } \sin FCH & = & 9,4129962 \\
 & \hline
 & & 9,7140262 \\
 \text{Lg } 3 & = & 0,4771213 \\
 & \hline
 \text{Lg } \sin FCG & = & 9,2369049 \\
 FCG & = & 9^\circ 56' 9'' \\
 \text{Lg } \cos FCG & = & 9,9934370 = \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 FCH} \\
 \text{C. Lg } \cos FCH & = & 0,0150562 \\
 \text{Lg } 45'' & = & 1,6532125 \\
 & \hline
 & & 1,6617057 \\
 x & = & 45'',89
 \end{array}$$

Man

Man habe einen Winkel gemessen von 120 Graden, so ist  $FCH = 15^\circ + 60^\circ = 75^\circ$

$$Lg 2 = 0,3010300$$

$$Lg \sin 75^\circ = 9,9849438$$

$$10,2859738$$

$$Lg 3 = 0,4771213$$

$$Lg \sin 9,8088525$$

$$Lg \cos q = 9,8837001$$

$$C. Lg \cos FCH = 0,5870038$$

$$Lg 45 = 1,6532125$$

$$Lg x = 2,1239164$$

$$x = 133,02 = 2' 13,02$$

bey der parallelen Lage  $x = 0' 45,89$

Unterschied  $= 1' 27,13$ , das gedoppelte hiervon gibt die

Verbesserung  $= 254,26$

Wenn also der dikere Theil des großen Spiegels dem einfallenden Strahl zugekehrt war, so ist der gemessene Winkel  $= 120^\circ - 2' 54'' = 119^\circ 57' 6''$ . Heißt der Winkel, welchen die Ebene des kleinen Spiegels mit der Axe der Fernröhre macht  $a$  (er ist bey diesem Sextanten  $= 75^\circ$  §. 64.) der Winkel welchen die Alhidade angibt  $y$ ; der Winkel welchen die beyden Flächen des großen Spiegels mit einander machen  $b$ ; so ist der verbesserte Winkel  $= y \pm 3b(\sec.(a \pm \frac{1}{2}y) \sqrt{1 - (\frac{1}{2}\sin(a \pm \frac{1}{2}y))^2} - \sec. a \sqrt{1 - (\frac{1}{2}\sin a)^2})$ .

### §. 92.

Wenn von einem sehr entfernten Gegenstand ein Lichtstrahl HC Fig. 43 auf den Spiegel auffällt, so wird dieser nach gedoppelter Brechung und einmaliger Zurückwerfung von der

der belegten Fläche des Spiegels in die Lage  $KI$  gebracht. Fällt von demselben Gegenstand ein Lichtstrahl auf  $k$ , so kann man diesen als parallel mit  $HC$  ansehen, dieser wird aber nach Zurückwerfung von der fordern Fläche des Spiegels nicht in die Lage  $KI$  kommen, weil der Winkel  $LKI < FCH$  (§. 90.) folglich wird der von der fordern Fläche zurückgeworfene einen Winkel machen  $= 3BAE \sec. FCH \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin FCH^2}$ . Ein solcher prismatischer Spiegel macht also auch von unendlich entfernten Gegenständen gedoppelte Bilder, welche desto weiter von einander abste-  
hen, je größer der Winkel  $FCH$  ist. Hienach kann man leicht untersuchen, ob ein Spiegel prismatisch ist. Wenn man nemlich den Mond oder die Sonne in dem Spiegel betrachtet, so wird man nur ein Bild sehen, wenn beyde Flächen einander parallel sind (§. 58.), wenigstens zwey Bilder, wenn sie gegen einander genigt sind, die desto mehr von einander abste-  
hen werden, je schiefer man die Lichtstrahlen auffallen läßt (§. 90.) \*). Vermittelst einer Fernröhre wird man dieses noch genauer beobachten können. Nach §. 91. kann man eine Tafel berechnen, welche für alle Winkel, die mit dem Sextanten ge-  
mes-

\*) Spiegel, deren beyde Flächen einander genau parallel sind, machen von sehr nahen Gegenständen auch zwey Bilder, für deren Absand von einander es aber ein Maximum gibt bey einer gewissen Schiefe des einfallenden Lichtstrahls. Läßt man diesen noch schiefer auffallen, so kommen die Bilder wieder einander näher (S. 57.).

messen werden können, bey einer angenommenen Neigung der Spiegelebenen z. B. von  $1^\circ$ , die Verbesserung der gemessenen Winkel angibt. Diese Verbesserungen sind wie die Formel §. 90. zeigt den Neigungen der Spiegelebenen proportional, und können folglich für jede andere gegebene Neigung leicht berechnet werden. Wenn man nun gefunden hat, daß die beyden Ebenen des Spiegels gegen einander geneigt sind, so kommt es darauf an, die Größe dieser Neigung zu bestimmen. Zu diesem Ende messe man mit dem Sextanten einen Winkel z. B. von  $120^\circ$  Grad. Man nehme den großen Spiegel heraus, und setze ihn umgekehrt ein, so muß der Fehler auf die entgegengesetzte Seite fallen. Nachdem man also den Fehler des Index bestimmt hat, messe man den Winkel zum zweyten mal; findet er sich wieder eben so groß, so sind beyde Flächen einander parallel; findet er sich größer oder kleiner, so sind sie gegen einander geneigt. Hätte man den Winkel bey der zweyten Messung  $= 120^\circ 4'$  gefunden, so ist der Fehler für  $120^\circ = 2'$ . Oben §. 89. war dieser Fehler für  $30''$  Neigung der Flächen beyder Spiegel  $= 2' 54''$ , also  $2' 54'' : 2' 03'' = 30''$ : der gesuchten Neigung  $= 20'', 69$ .

### §. 93.

Wenn die Durchschnittslinie der beyden Spiegelebenen nicht auf der Ebene des Sextanten senkrecht steht, sondern mit derselben parallel ist, oder einen schiefen Winkel macht, so behält die Ebene, in welcher der einfallende

do

de und der zurückgeworfene Lichtstrahl liegen nicht immer dieselbe Lage gegen der Ebene des Sextanten, sondern die Lage dieser Ebene ändert sich mit der Veränderung des Einfallswinkels; daher wird die Bestimmung des daher rührenden Fehlers in der Winkelmessung verwickelt. Es würde unnütz seyn sich länger hiebey aufzuhalten, weil die Bestimmung der hiezu erforderlichen Gröſsen nicht mit einiger Genauigkeit geschehen kann. Ueberhaupt wird man vermittelst eines Sextanten, dessen großer Spiegel prismatisch ist, niemals genaue Beobachtungen machen können, weil die Bilder, welche alsdann von beyden Spiegelflächen entstehen, theils leicht mit einander verwechselt werden können, theils der Bemerkung ihrer genauen Berührung hinderlich sind. Metallene Spiegel wären also den gläsernen vorzuziehen, weil sie diesen Fehlern nicht ausgesetzt sind. Die gewöhnlichen metallenen Spiegel laufen leicht an, daher werden in dem *Dictionnaire encyclopédique de marine par Vial-du Clairbois* (art. Sextant) Spiegel von *Platina* vorgeschlagen. Wenn man einen Sextanteu blos zu Sonnenbeobachtungen wollte, so könnte man den großen Spiegel von dunkelgefärbtem Glase machen, wie die Glasplatten des künstlichen Horizonts sind (§. 75.).

Wenn

## *Feinheit der Theilstriche.*

### §. 94.

Wenn man einen Theilstrich des Vernier genau auf einen Theilstrich des Gradbogens stellt, so steht der nächstvorhergehende und folgende schon so merklich von einem Theilstrich des Gradbogens ab, daß man diesen Abstand, wenn man sich des zu dem Sextanten gehörigen Vergrößerungsglases bedient, noch sehr wohl halbiren kann. Der zweyte Theilstrich berührt alsdann kaum noch den auf dem Gradbogen, Folglich nimmt ein solcher Theilstrich nur einen Winkel von einer Minute ein. Da aber der Sextant in 120 Grade getheilt ist, so beträgt diesen Winkel eigentlich nur 30". Setzt man die Dike eines Theilstrichs  $= b$ , den Halbmesser des Gradbogens  $= a$ , so ist der Winkel welchen ein Theilstrich einnimmt  $= 206265 \frac{b}{a}$  Secunden (*Mayers pract. Geometrie I. Th. §. 90.*) also ist hier  $\frac{b}{a} \frac{30}{206265}$ . Der Halbmesser des Sextanten ist  $= 5$  Z. folglich  $b = \frac{150}{206265}$  Z.  $= 0,000727$  Z.  $= 0,0087$  Lin. Diese Linien sind beynahe so fein, als die auf den Branderschen Glasmikrometern, welche 0,005 Lin. breit sind. Uebrigens ist zu bemerken, daß die Ungewißheit bey dem Ablesen eines Winkels nicht so groß ist als der Winkel, welchen die Breite eines Theilstrichs einnimmt. Man kann vermittelst des Vergrößerungsglases noch sehr gut sehen,

hen, ob die Theilstriche des Vernier und des Gradbogens genau zusammentreffen, oder um die Hälfte ihrer Dike von einander abstehen. Ich setze daher den Fehler, welchen man bey dem hier beschriebenen Sextanten in Ablesung des Winkels vielleicht noch begehen könnte auf 15 Secunden. Da man aber bey Höhenmessungen mittelst des künstlichen Horizonts die gedoppelte Höhen mißt (§. 71. 78.); so beträgt dieser Fehler in der Messung der Höhe nur  $7\frac{1}{2}$  Secunden.

*Fehler in der Stellung des künstlichen Horizonts.*

§. 95.

Wenn die Glasplatte des künstlichen Horizonts (§. 75.) nicht genau horizontal ist, so wird ein darauf gefälltes Perpendikel nicht das Zenith treffen. Es seye also Z das Zenith, Fig. 44, P der Punct wo die Verlängerung des Perpendikels die scheinbare Himmelskugel trifft, S der Punct, dessen Höhe man messen will. Man lege durch diese drey Puncte die größten Kreise  $ZP, ZS, PS$ ; so ist  $ZP$  der Neigungswinkel der Ebene des künstlichen Horizonts gegen den wahren Horizont,  $ZS$  des Puncts S Abstand vom Zenith oder das Complement seiner Höhe,  $PS$  das Complement der fehlerhaften Höhe. Nun ist in dem sphärischen Dreyek  $ZPS$

$$\cos ZS = \cos PS \cos PZ + \sin PS \sin PZ \cos ZPS$$

oder wenn  $h$  die beobachtete fehlerhafte Höhe,  $h'$  die verbesserte Höhe ist

sin



$$\begin{aligned}\sin h' &= \sin h \cos PZ + \cos h \cos ZPS \sin ZP \\ &= (1 - 2(\sin \frac{1}{2} PZ)^2) \sin h + \sin PZ \cos h \cos PZS \\ \text{also } \sin h' - \sin h &= \sin PZ \cos h \cos ZPS - 2(\sin \frac{1}{2} PZ)^2 \sin h \\ \text{folglich}\end{aligned}$$

$$2 \sin \left( \frac{h' - h}{2} \right) = \frac{\sin PZ \cos h \cos ZPS - 2(\sin \frac{1}{2} PZ)^2 \sin h}{\cos \left( \frac{h' + h}{2} \right)}$$

Aber  $PZ$  kann man immer kleiner als eine Minute annehmen, und  $h$  wird bey einem Sextanten nicht viel über 66 Grade betragen können, folglich ist  $PZ$  und daher auch  $\frac{h' - h}{2}$

in Vergleichung mit  $h$  sehr klein, folglich kann man setzen

$$h' - h = \frac{PZ \cos h \cos ZPS - \frac{1}{2}(PZ)^2 \sin h}{\cos h}$$

$$= PZ \cos ZPS - \frac{1}{2}(PZ)^2 \operatorname{Tg} h$$

Setzt man nun  $PZ = 1 \text{ Min.} = 60''$  so ist  $\frac{1}{2}(PZ)^2 = 1800$ , welches mit  $e \operatorname{Tg} h$  multiplicirt den Werth dieses Glieds in Secunden gibt (§. 85.); also für  $h = 66^\circ$

$$\operatorname{Lg} \operatorname{Tg} h = 0,5514169$$

$$\operatorname{Lg} e = 0,6855749 - 6$$

$$\operatorname{Lg} 1800 = 3,2552725$$

$$\hline 0,2922643 - 2$$

$$\frac{1}{2}(PZ)^2 \operatorname{Tg} h = 0,0196 \text{ Sec.}$$

Man kann daher setzen  $h' - h = PZ \cos ZPS$ ; folglich kann der Fehler, welcher aus der nicht genau horizontalen Lage des künstlichen Horizonts entsteht, nicht größer werden als der Neigungswinkel des künstlichen Horizonts gegen den wahren Horizont. Die Aenderung des Winkels, welchen der auf den Horizontalspiegel auffallende Strahl mit dem zu-

zurückgeworfenen macht, ist zwar das gedoppelte der Aenderung des künstlichen Horizonts, allein dieser Winkel ist auch die gedoppelte Höhe (§. 71.). Nimmt man nun an, die Ebene des künstlichen Horizonts seye gegen den wahren Horizont um einen Winkel von 7,5 Sec. geneigt, so wird bey dem Umwenden der Libelle (§. 75.) dieser Fehler verdoppelt, und bringt in der Luftblase eine Bewegung von  $\frac{1}{2}$  Lin. hervor (§. 76.). Wenn man also annimmt, man könne die Stelle der Luftblase nur bis auf  $\frac{1}{2}$  Lin. genau bemerken, so wird doch der gröste Fehler in der Stellung des künstlichen Horizonts nicht über  $7\frac{1}{2}$  Secunden betragen. Gebraucht man aber einen Queksilberhorizont, so fällt dieser Fehler ganz weg.

*Fehler, den man begehen kann, indem man die beyden Bilder zur Berührung bringt.*

#### §. 96.

Die Genauigkeit, mit welcher man die beyden Bilder zur Berührung bringen kann, hängt theils von der Vergrößerung und Güte der Fernröhre, theils von der Beschaffenheit der Spiegel ab. Sind diese nicht sehr gut gearbeitet, so wird man nie das reflectirte Bild deutlich sehen, auch siehet man leicht, daß man nur durch Versuche bestimmen kann, wie groß die Fehler seyn können, welchen man diesfalls ausgesetzt ist. Diese Fehler zu bestimmen machte ich folgenden Versuch.

Ich

Ich nahm mit dem Sextanten die Höhe der Sonne nahe am Mittag, und beobachtete, wie viel Zeit verfloß, bis ich bemerkte, daß die beyden Sonnenbilder nach Beschaffenheit der Umstände über einander giengen, oder von einander abstunden. Aus der Polhöhe, Stundenwinkel und Abweichung der Sonne kann man, wie unten wird gezeigt werden, berechnen, um wie viel sich die Höhe ändert, wenn sich der Stundenwinkel um eine gewisse Grösse ändert. Da fand ich nun, daß eine Aenderung in der Sonnenhöhe von 4 Secunden schon merklich war, bey welcher also der Abstand der Sonnenbilder sich um 8 Secunden änderte (§. 71.). Ich setze daher den grösten Fehler, welchen man begehen kann, auf 8 Secunden, welches 4 Secunden Fehler in der einfachen Höhe gibt.

*Anmerkung.* Herr Professor Späth in Alsdorf setzt die Zuverlässigkeit, mit welcher man die beyden Bilder zur Berührung bringen kann, auf 9,5 Secunden, die Genauigkeit, mit welcher man den künstlichen Horizont nivelliren kann, auf 4 Secunden, den grösten Fehler, welchen man bey Ablesung des Winkels begehen kann, auf  $7\frac{1}{2}$  Secunden. H. Bode astronom. Jahrbuch für 1792 S. 143 u. f.

*Ueber die Genauigkeit, mit welcher vermittlest des Spiegelsextanten Winkel gemessen werden können.*

### §. 97.

Die bisherigen Untersuchungen dienen nun dazu, im ganzen die Genauigkeit zu bestimmen.

stimmen, mit welcher man mittelst eines guten Spiegelsextanten von 5 Zollen im Halbmesser, wie der oben beschriebene ist, einen Winkel messen kann. Die Axe der Fernröhre kann man gewiß bis auf 4 Min. genau nach der Methode (§. 67. u. 87.) der Ebene des Sextanten parallel machen, folglich wäre der größte Fehler, welcher aus der etwas unrichtigen Lage der Axe entstehen könnte nach §. 85.  $0'',7$ . Den großen Spiegel kann man nach §. 65. bis auf 3 Minuten genau auf die Ebene des Sextanten senkrecht stellen; ein Fehler von 3 Min. gibt hier den größten Fehler  $= 0'',3$ . Bey dem Ablesen der Winkel kann man einen Fehler begehen von höchstens 15 Secunden (§. 94.) und indem man die beyden Bilder zur Berührung bringt, einen von 8 Secunden. Leztere beyden Fehler haben auch auf die Bestimmung des Fehlers des Index (§. 68.) einen Einfluß; man könnte also hierüber bis auf  $15 + 8$  oder 23 Secunden ungewiß seyn. Fallen also alle Fehler auf eine Seite, so ist der größte mögliche Fehler  $= 0'',7 + 0'',3 + 15'' + 8'' + 23'' = 47''$ . Mißt man nun mittelst des Queksilberhorizonts eine Sonnenhöhe, so beträgt der größte Fehler in der Messung der gedoppelten Sonnenhöhe  $47''$ , weil die Oberfläche des Queksilbers von selbst eine horizontale Ebene wird; folglich kann man eine Sonnenhöhe bis auf 23,5 Secunden genau messen.

*Über einige andere Instrumente zum Winkelmessen mit Spiegeln und Ramsden's Verbesserungen der Spiegelsextanten.*

§. 98.

Der berühmte *Tobias Mayer* schlug anstatt eines Sextanten oder Octanten einen ganzen Kreis vor, dessen Beschreibung man in seinen *Tabulis motuum Solis ac Lunae*, welche die englische Admiralität im J. 1770 herausgegeben hat, findet, um dabey eine von ihm erfundene Methode die Winkel durch Wiederholung zu messen \*), wodurch man ein vielfaches des auszumessenden Winkels bekommt, anwenden zu können. Borda brachte an diesem Reflexionskreis noch einige Verbesserungen an, und richtete ihn so ein, daß man die Winkel auf beyden Seiten des Nullpuncts messen konnte, wobey nicht allein die Fehler, welche man bey der Bestimmung des Fehlers des Index begehen kann, wegfallen, sondern auch die Beobachtungen weniger Zeit erfordern. Borda gab von diesem Instrument die schon mehrmahls angeführte Schrift heraus: *Description et usage du cercle de réflexion, avec différentes méthodes pour calculer les observations nautiques. Par le Chevalier de Borda. A Paris MDCCLXXXVII.* In dieser Schrift findet man auch eine Beschreibung von dem Mayer'schen Instrument. Herr Hofrath *Mayer* beschreibt

\*) Comment. Soc. R. Götting. T. II und Herrn Hofr. J. T. Mayers practische Geometrie I. Th. S. 508.

schreibt in seiner practischen Geometrie (1 Th. S. 461. §. 122 u. f. der neuen Auflage) einen Winkelmesser mit Spiegeln in der Gestalt eines Quadranten, auch findet man daselbst eine deutliche Darstellung der Theorie geometrischer Werkzeuge mit Spiegeln. *Ramsden* hat auch eine Abhandlung über die Sextanten geschrieben, von welcher aber nur wenige Exemplare gedruckt wurden, weswegen diese Schrift nicht mehr zu haben ist. Herr Professor *Seyffer* hatte die Güte mir einen Aufsatz über einige Verbesserungen des Spiegelsextanten mitzutheilen, über welche ihm während seines Aufenthalts in England Ramsden selbst Auskunft gab. Diese Verbesserungen bestehen in folgendem. Ramsden erinnert mit Recht, daß man den Sextanten durch die vielen Correctionsschrauben allzuzusammengesetzt und eben dadurch wandelbar gemacht habe. Er warf daher an dem Sextanten alle Correctionsschrauben weg, diejenige ausgenommen welche dazu dient, den kleinen Spiegel auf die Ebene des Sextanten senkrecht zu stellen, und begnügte sich damit, bey dem Bau des Sextanten den kleinen Spiegel ungefähr dem großen parallel zu stellen, wenn die Alhidade auf 0 steht. Hat man den Fehler des Index einmal bestimmt, so wird sich derselbe nicht leicht ändern. Ramsden versichert, daß mehrere Sextanten, nachdem sie nach Indien und wieder zurück gebracht worden waren, noch denselben Fehler des Index hatten, wie man ihn vor der Abreise gefunden hatte. (Der oben beschriebene Sextant

hat ebenfalls an dem kleinen Spiegel nur eine Correctionsschraube.). Ferner suchte Ramsden der Biegsamkeit der Ebene des Sextanten abzuheffen, und sie bey der geringsten Menge von Materie so fest als möglich zu machen, welches er am besten durch Regeln, die auf der Ebene des Sextanten senkrecht stehen erhielt. Hat der Sextant nicht seine gehörige Festigkeit, so beugt er sich nachdem man ihn in verschiedene Lagen bringt, wodurch die Spiegel ihre Lage gegeneinander ändern und Fehler in dem Winkelmessen entstehen. Die Einrichtung, welche darin besteht, daß der Limbus und alle übrigen Stäbe des Sextanten doppelt sind, die durch Pfeiler mit einander verbunden werden, hat Ramsden wieder verworfen, *Troughton* hat einen auf diese Art eingerichteten Sextanten von 10 Zollen im Halbmesser für die hiesige Universität verfertigt. Das ganze Instrument scheint mir etwas wandelbar zu seyn, und der Fehler des Index verändert sich sehr leicht. Auch den großen Spiegel befestigte Ramsden auf eine neue Art auf der Alhidade mittelst eines starken Klobens von Messing, wie an oben beschriebenen Sextanten gezeigt wurde. Ramsden zieht Spiegel von dunkeln, schwarzen Glas den belegten Spiegeln vor, weil letztere sehr schwer genau zu verfertigen sind. Ein schwarzer Spiegel an einem Sextanten wird wohl die durch Reflexion gesehenen Objecte etwas dunkel zeigen, zumal da die von dem großen Spiegel zurückgeworfene Strahlen noch einmal von dem kleinen Spiegel zurückgewor-



geworfen werden, bis sie auf das Objectiv der Fernröhre fallen. Bey Sonnenbeobachtungen hat dieses nichts zu bedeuten, weil man ohnehin das Sonnenbild noch durch gefärbte Gläser blenden muß.

Herr *von Zach* ließ an seinen Sextanten zwar die Correctionsschrauben anbringen, aber sie versenken, so daß man sie nur vermittelst eines Schlüssels umdrehen kann. Bey dieser Einrichtung kann das Instrument nicht leicht wandelbar werden, und man hat doch die Bequemlichkeit, den Sextanten berichtigen zu können. Weil die gefärbten Gläser, wenn sie nicht sehr gut gearbeitet sind, leicht einen Fehler in dem Winkelmessen erzeugen können, so brachte Herr von Zach bey Messung der Sonnenhöhen nur ein gefärbtes Glas vor dem Ocular an, um die beyden Sonnenbilder zugleich zu blenden. Bey den gewöhnlichen Blendungsgläsern werden die Fehler durch die Fernröhre noch vergrößert, welches bey dieser Einrichtung nicht statt finden kann.

## *Astronomische Uhren.*

### §. 99.

Die Uhren, welche zu astronomischen Beobachtungen gebraucht werden, sind von zweyerley Art, nemlich solche, die beym Gebrauch fest stehen müssen, und solche, die auch, indem sie von einem Ort an dem andern gebracht werden, ihren Gang ununterbrochen fortsetzen. An jenen ist ein Pendel angebracht, das durch seine Schwingungen die Umlaufszeit der Zeiger bestimmt, und bey dem Anfang eines jeden Schwungs durch das Räderwerk, welches durch ein Gewicht in Bewegung gesetzt wird, eine kleine Beschleunigung erhält, welche das ersetzt, was es durch Reibung und Widerstand der Luft verlohren hat. Diese haben statt des Pendenls eine *Unruhe (Balancier)*, bey welcher eine Spiralfeder die Stelle der Schwere vertritt und das Räderwerk wird ebenfalls durch eine Feder in Bewegung gesetzt. Huygens hat zuerst das Pendel an den festen, die Unruhe an den tragbaren Uhren angebracht, und noch jezt hat man kein besseres Mittel gefunden, den Gang dieser Uhren gleichförmig zu machen. Die erstere Art von Uhren hat man früher zu einer sehr großen Vollkommenheit gebracht, als die letztere, die aber, nachdem *Harrison* die Bahn gebrochen, und *Mudge* ein neues *Stoswerk (échappement)* erfunden hatte, nun auch

auch in einer sehr grossen Vollkommenheit verfertigt werden, daß man eine Pendeluhr schon als gut ansehen kann, welche einen so gleichförmigen Gang hat, als die tragbaren Uhren eines Mudge und Emery. Das beste Stoswerk zu den Pendeluhren ist der *Graham'sche Haken*, von dessen guten Ausarbeitung die Genauigkeit der Uhr vorzüglich abhängt. Das Räderwerk der Uhr muß man so einfach als möglich machen. Der Secundenzeiger wird von der Axe des Steigrades, der Minutenzeiger von der Axe des Stundenrades getragen; die Stunden kann man auf die gewöhnliche Art einen mit dem Minutenzeiger concentrischen Zeiger weisen lassen. Noch einfacher läßt sich dieses machen, wenn man an der Röhre des Minutenzeigers, welche auf der Axe des Stundenrades steckt und durch Friction gehalten wird, ein Getriebe von sechs Zähnen anbringt, und dieses in ein Rad von 144 Zähnen greifen läßt, welches eine Scheibe mit einer Eintheilung in 24 gleiche Theile und beygeschriebenen Stunden von 0 bis 24 trägt. Diese Zahlen erscheinen nach und nach, indem sich die Scheibe dreht in einer Oefnung des Zifferblats, an welcher ein kleiner Zeiger sitzt, der die Stunden zeigt. Dem Steigrad gibt man 30 Zähne, daher das Pendel 60 Schwingungen machen muß, bis es einmal herum kommt, welches in einer Minute geschiehet, wenn das Pendel Secunden schwingt. *Franklin* hat eine sehr einfache Pendeluhr vorgeschlagen, die nur aus drey Rädern besteht, und Stunden, Minuten und Secunden zeigt.

Das *Steigrad* hat 30 Zähne, kommt in jeder Minute einmal herum, und trägt den Secundenzeiger, das letzte Rad vollendet einen Umlauf in 4 Stunden und trägt an seiner Axe einen Zeiger, der auf dem in 4mal 60 gleiche Theile getheilten Zifferblatt die Minuten und die in einer Spirallinie herumgeschriebenen Stunden zugleich zeigt, so dals die Stunden 0, 4, 8, 12; 1, 5, 9; 2, 6, 10; 11, 7, 3; auf vier Halbmessern des Kreises welchen der Zeiger beschreibt zu stehen kommen, die das Zifferblatt in vier Quadranten theilen. Man muß also hier schon vorher bis auf vier Stunden wissen wie viel Uhr es ist. Die Einrichtung des Räderwerks kann auf folgende Art gemacht werden. Das *Steigrad* bekommt 30 Zähne und trägt ein Getrieb von 6. Dieses greift in ein Rad von 90 Zähnen, das an seiner Axe wieder ein Getrieb von 6 hat, und vermittelt dieses in ein Rad von 96 Zähnen greift, an welchem eine Walze oder Rolle angebracht ist, um die Schnur mit dem Gewicht aufzunehmen, so wird dieses letztere Rad einen Umlauf machen, wenn das *Steigrad* deren 240 gemacht hat, denn  $\frac{90 \cdot 96}{6 \cdot 6} = 240$ . Da nun das *Steigrad* in jeder Minute einen Umlauf macht, so dauert die Umlaufszeit des letzten Rades 240 Min. oder 4 St.

§. 74.

Der Gang der Pendeluhren hängt also von der Dauer der Schwünge des Pendels, folglich

lich von der Länge desselben und der Größe der Schwünge ab \*). Ein Pendel das Secunden schwingt hat nicht an allen Orten der Erdoberfläche gleiche Länge, wie *Richer* zuerst entdeckte, der im J. 1672 lehrte, daß das Secundenpendel auf der Insel Cayenne um 1,25 Lin. kürzer sey als in Paris. Es folgt hieraus daß die Schwere in der Gegend des Aequators geringer seye als in Europa. Diese Abnahme der Schwere gegen dem Aequator hin, kommt theils von der durch die Umdrehung der Erde um ihre Axe erzeugten Schwingkraft, theils von ihrer gegen die Pole zusammengedrückten Gestalt her. So fand *Bouguer* die Länge des Secundenpendels unter der Breite  $0^{\circ} 13'$  von 438,69 pariser Linien auf dem *Pichincha*, unter der Breite von  $0^{\circ} 25'$  aber und am Meer = 439,10. *Mayer* in Kola unter der Breite  $68^{\circ} 52'$  von 441,31 Linien; eine Tafel von beobachteten Pendellängen an verschiedenen Orten der Erde findet man in Herrn Prof. *Bode's* Kenntniß der Erdkugel S. 85. In Gotha fand Herr *von Zach* die Länge des Secundenpendels = 440,693 Lin. (Suppl. Band zu *Bode's* astr. Jahrbuch S. 196. Diese Pendellängen beziehen sich auf ein Pendel das aus einem feinen Faden, den man sich ohne Schwere gedenkt, und einem angehängten Gewicht, dessen ganze Schwere man sich in einem Punct vereinigt vorstellt, besteht, und ein einfaches Pendel heißt. Ein Pendel,  
an

\*) *Kästners* höhere Mechanik. S. 326. Aufgabe 33. 2. Auflage.

an welchem mehrere Punkte als schwer betrachtet werden müssen, heist ein *zusammengesetztes* Pendel, an welchem man immer einen Punkt angeben kann, in welchem die ganze Masse desselben vereinigt ebenso schwingen würde, als das zusammengesetzte Pendel selbst schwingt. Dieser Punkt heist der *Mittelpunkt des Schwungs*, und sein Abstand von dem Aufhängpunkt ist die Länge eines einfachen Pendels, das seine Schwingungen in derselben Zeit macht, in welcher das zusammengesetzte die seinigen vollendet. Huygens gab in seinem *Horologium, oscillatorium* die Methoden an, den Mittelpunkt des Schwunges zusammengesetzter Pendel zu finden. Man findet diese Methoden in Hrn. Hofrath Kästners *höheren Mechanik* mit Anwendung auf verschiedene zusammengesetzte Pendel und in *Eulers theoria motus corporum solidorum*. Gewöhnlich besteht das Gewicht des Uhrenpendels aus einer *Linse*, die man an der Pendelstange auf und niederschieben kann, um dadurch den Gang der Uhr geschwinder oder langsamer zu machen.

Die Linse seye auf beyden Seiten gleich erhaben, ihre Dike  $= 2a$ , ihr Durchmesser  $= 2b$ , Gewicht  $= M$ . Die Pendelstange ein Parallelepipedum, Länge  $= l$ , Breite (in der Ebene des Schwungs)  $= \beta$ , Gewicht  $= m$ . Die Stange gehe durch die Linse hindurch, und das Gewicht eines Parallelepipedums von derselben Materie, aus welcher die Linse besteht, das die Öffnung der Linse für die Pendelstange ausfüllen würde, seye  $= m'$ , und  $L$  der

der Abstand des Mittelpuncts der Linse von dem Anfang der Stange: so ist das Moment der Trägheit der durchlöcherten Linse um ihre Axe durch den Schwerpunct senkrecht auf die Ebene des Schwungs des Pendels  $= A =$   

$$= \frac{1}{10} M \frac{a^4 + 5 a^2 b^2 + 10 b^4}{a^2 + 3 b^2} - \frac{1}{12} m'$$

$$(4 a^2 + \beta^2)$$

Das Moment der Trägheit der Pendelstange um eine Axe durch ihren Anfangspunct senkrecht auf die Fläche, deren Breite  $= \beta$ , seye  $= B$ , so ist

$$B = \frac{m}{3} (l^2 + \frac{1}{4} \beta^2)$$

Der Aufhängpunct seye an dem obern Ende der Pendelstange, so ist die Länge des einfachen Secundenpendels, das seine Schwingungen mit diesem in gleicher Zeit macht

$$= \frac{(M - m') L^2 + A + B}{(M - m') L + \frac{1}{2} m l}$$

Vermittelst dieser Formel kann man also die Abmessungen eines Pendels von der hier vorausgesetzten Gestalt, das Secunden schwingen soll, bestimmen.

### §. 101.

Die Zeit der Pendelschwünge hängt, wie schon oben bemerkt worden ist, nicht allein von der Länge des Pendels, sondern auch von der Größe der Schwünge ab. Wenn die Länge des Pendels  $= a$ , die Höhe des freyen Falls der Körper in einer Secunde  $= g$ , und der ganze Bogen, welchen das Pendel beschreibt,

$= 2$



$= 2\phi$  gesetzt wird, so läßt sich die Zeit eines Hingangs durch diesen Bogen durch folgende Reihe ausdrücken

$$\pi \sqrt{\left(\frac{a}{2g}\right)} \left(1 + \frac{1}{4}(\sin \frac{1}{2}\phi)^2 + \frac{9}{64}(\sin \frac{1}{2}\phi)^4 + \frac{25}{256}(\sin \frac{1}{2}\phi)^6 + \dots\right) + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}\right)^2 (\sin \frac{1}{2}\phi)^{2n}$$

Die Schwingungszeiten verhalten sich also wie diese Reihen; setzt man daher die Zeit eines halben Schwungs oder Hingangs durch den Bogen  $2\phi$  einer Secunde gleich, so wird die Zeit eines halben Schwungs desselben Pendels durch einen Bogen  $= 2\psi$  seyn =

$$\frac{1 + \frac{1}{4}(\sin \frac{1}{2}\psi)^2 + \frac{9}{64}(\sin \frac{1}{2}\psi)^4 + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{4}(\sin \frac{1}{2}\phi)^2 + \frac{9}{64}(\sin \frac{1}{2}\phi)^4 + \text{etc.}}$$

Es seye  $\psi = 2^\circ$ ,  $\phi = 3^\circ$

$$\text{so ist } \text{Lg}(\sin \frac{1}{2}\psi)^2 = 0,4837106 - 4$$

$$(\sin \frac{1}{2}\psi)^2 = 0,00030459$$

$$\frac{1}{4}(\sin \frac{1}{2}\psi)^2 = 0,00007615$$

$$\text{ebenso } \frac{1}{4}(\sin \frac{1}{2}\phi)^2 = 0,00017131$$

Die folgenden Glieder werden so klein, daß man sie ohne merklichen Fehler weglassen kann;

$$\text{folglich ist die gesuchte Zeit} = \frac{1,00007615}{1,00017131}$$

$= 0,99990485$  Secunden und die Uhr würde hienach in einem mittlern Sonnentag voreilen um 8,23 Secunden. Setzt man die Reihe welche zu der Schwingungszeit  $T$  gehört  $= S$ , die welche zu  $t$  gehört  $= s$ , die dazu gehörigen Bogen des Schwungs  $2\phi$  und  $2\psi$ , Anzahl der Schläge in einem mittlern Sonnentag  $= n$  und  $N$ , so verhält sich

$$T : t$$

$$\begin{aligned} T:t &= S:s \\ T:t &= N:n \\ \hline S:s &= N:n \\ S-s:s &= N-n:n \end{aligned}$$

Also die Voreilung der Uhr in einem mittlern  
Sonnentag  $= \frac{n(S-s)}{s}$

Gebraucht man nun die beyden ersten Glieder der Reihen für  $S$  und  $s$ , so wird

$$\begin{aligned} N-n &= n \left( \frac{1 + \frac{1}{4}(\sin \frac{1}{2}\varphi)^2 - 1 - \frac{1}{4}(\sin \frac{1}{2}\psi)^2}{1 - \frac{1}{4}(\sin \frac{1}{2}\psi)^2} \right) \\ &= \frac{\frac{n}{4} ((\sin \frac{1}{2}\varphi)^2 - (\sin \frac{1}{2}\psi)^2)}{1 - \frac{1}{4}(\sin \frac{1}{2}\psi)^2} \\ &= \frac{\frac{n}{4} \sin \left( \frac{\varphi + \psi}{2} \right) \sin \left( \frac{\varphi - \psi}{2} \right)}{1 - \frac{1}{4}(\sin \frac{1}{2}\psi)^2} \end{aligned}$$

Oder beynahe

$$N-n = \frac{n}{4} \sin \left( \frac{\varphi + \psi}{2} \right) \sin \left( \frac{\varphi - \psi}{2} \right)$$

Wendet man diese Formel auf das obige  
Beyspiel an, so wird  $n=86400$ ;  $\varphi=3^\circ$ ;  $\psi=2^\circ$ ;

$$\frac{\varphi + \psi}{2} = 2^\circ 30'; \quad \frac{\varphi - \psi}{2} = 30'; \quad \frac{n}{4} = 21600$$

$$\text{Lg } 21600 = 4,3344538$$

$$\text{Lg sin } \frac{\varphi + \psi}{2} = 8,6396796 - 10$$

$$\text{Lg sin } \frac{\varphi - \psi}{2} = 7,9408419 - 10$$

$$\text{Lg}(N-n) = \underline{\underline{0,9149753}}$$

$$N-n = 8,2219 \text{ Secunden.}$$

Wenn

Wenn man das Verhältniß der Bogen  $\phi$  und  $\psi$  beybehält, sie selbst aber kleiner annimmt, so wird der Unterschied der ihnen zugehörigen Anzahl von Schlägen in einem mittlern Sonnentag geringer. Setzt man z. B.  $\psi = 1^\circ$ ,  $\phi = 1^\circ 30'$ , so beträgt die Voreilung der Uhr nur 2,05 Secunden. Je kleiner man also die Schwünge des Pendels einer Uhr macht, desto weniger wird ihr gleichförmiger Gang durch die Aenderungen der Schwingungsbogen des Pendels gestört. Bey der Pendeluhr auf dem Observatorio in *Greenwich* war die GröÙe des Schwungs im Febr. 1787  $= 3^\circ 54'$ ; ( $1' 57''$  auf jeder Seite der Verticallinie) im Sept. 1787  $= 2. (2^\circ 7')$ . Hienach hätte die Uhr im Sept. täglich um  $1'', 43$  Secunden langsamer gehen sollen, als im Februar. Allein das Pendel wurde d. 4. Jul. verkürzt: *Astronomical observations made at the royal observatory at Greenwich 1787 by N. Maskelyne*. Wenn also die Länge des Pendels einer Uhr sich nicht ändert, so eilt sie doch im Winter vor, wenn die Schwingungen wegen der Verdickerung des Oels kleiner werden. Man bemerkt dies an Uhren, die mit guten Compensationspendeln versehen sind, z. B. an der *Sheltonschen* Uhr auf der Göttingischen Sternwarte, welche im Sommer gegen 2 Sec. täglich langsamer geht als im Winter.

### §. 102.

*Huygens* brachte an seinen Uhren die Pendel auf eine Art an, die große Schwingungen des Pendels erforderte. Weil nun bey gros-  
sen

sen Schwingungen eine kleine Aenderung in dem Bogen des Schwungs schon eine beträchtliche Aenderung in der Zeit der Schwingungen hervorbringt, so suchte er seinen Pendeln eine solche Einrichtung zu geben, daß große und kleine Schwingungen in derselben Zeit erfolgen sollten. Er fand daß die *Cycloide* diese Eigenschaft habe, und hieng daher die Pendel zwischen zweyen cycloidalisch gebogenen Blechen an einem Faden auf, der beym Schwingen abwechselnd sich auf diese Bleche aufwickelte, und sich wieder davon abwickelte, so daß die Schwingungen wirklich in einer Cycloide geschahen, weil die durch Abwicklung der Cycloide entstandene Linie wieder dieselbe Cycloide ist. Allein die Cycloide hat, wie Euler zeigte, nur in dem leeren Raume die Eigenschaft, daß große und kleine Schwingungen in ihr in einerley Zeit erfolgen, bey einem zusammengesetzten Pendel nicht einmal im leeren Raume. Die Erfindung des englischen Hakens oder Grahamschen Ankers macht aber diese Verbesserung des Pendels entbehrlich, weil man durch jenes *Echappement* sehr kleine Schwingungen erhalten kann.

### §. 103.

Der Widerstand der Luft, welchen die Pendel bey ihrer Bewegung leiden, wird desto größer, je größer die beschriebenen Bogen sind, und je geringer das specifische Gewicht der Linse ist. Auch aus diesem Grunde sind kleine Schwingungen den großen vorzuziehen. Dem Gewicht des Pendels gibt man die Ge-  
stalt

stalt einer Linse, um den Widerstand der Luft zu vermindern, und verfertigt sie aus einer messingenen mit Bley ausgegossenen Schale. Um das Reiben am Aufhängungspunct zu vermindern, hat man sie anfangs an einem Faden aufgehängt; weil dieser aber sich leicht ausdehnt und zusammenzieht nach der verschiedenen Trokenheit der Luft, so gebraucht man jezo anstatt der Fäden stählerne Federn, dergleichen zu den Taschenuhren gebraucht werden, oder man gibt oben den Pendelstangen ein paar stählerne Zapfen, die unterwärts gekehrte Schneiden haben, und mit diesen in halbcylindrischen Hölungen, die sich in unterlegten Platten von gehärtetem Stahl oder Agat befinden, liegen, wodurch das Pendel nach Art eines Wagbalkens aufgehängt wird. Diese Art die Pendel aufzuhängen (*suspension à couteaux*) ziehen einige Künstler und besonders Berthoud der Aufhängung mit Federn vor. Berthouds Versuche zeigen wirklich, daß erstere Art dem Pendel weniger Widerstand entgegensezt als die letztere. Allein mit der Zeit verlieren die stählerne Schneiden und die Unterlagen ihre Politur, und verursachen alsdann eine stärkere Reibung als der von der Unbiegsamkeit der Federn herkommende Widerstand beträgt. Es scheinen daher diese wegen ihrer Dauerhaftigkeit den Vorzug vor jenen zu verdienen.

#### §. 104.

Auf den Gang der Pendeluhrn wirken hauptsächlich auch die Abwechselungen der  
Wärme

Wärme und Kälte, weil die Pendelstange durch die Wärme länger und durch die Kälte kürzer wird. Daher gehen die Pendeluhrn im Sommer langsamer als im Winter. La Lande setzt die tägliche Voreilung einer Uhr mit einer eisernen Pendelstange im Winter auf 20 Sec, wenn sie im Sommer nach mittlerer Sonnenzeit geht \*). Ebenso fand es auch H. Hofr. Kästner an einer von Kampe verfertigten Uhr. (*Ueber die Aenderung des Gangs der Pendeluhrn, Göttingen. 1778.*) Aus Beobachtungen, die Herr Schulze auf der Berliner Sternwarte über den Gang zweier Pendeluhrn anstellte, folgt diese Voreilung = 15 Sec. (*Berlin. astron. Jahrbuch oder Ephemeriden für 1783.*) Graham kam auf den Gedanken, die Pendelstange von *Ebenholz* oder *Nußbaum* zu machen, weil das Holz nach der Länge der Fasern durch die Wärme wenig verändert wird, es ist aber der Wirkung der Feuchtigkeit und Trockenheit der Luft unterworfen, und wirft sich daher leicht. *Wollaston* hat über eine mit einer hölzernen Pendelstange versehene Uhr ein ganzes Jahr hindurch Beobachtungen angestellt, die er in den philosophical Transactions bekannt gemacht hat \*\*). Die Uhr gieng den *Winter* über *langsamer*, und im *Sommer* *geschwinder* als sie der mittlern Zeit nach gehen sollte. Die hölzerne Pendelstange hat sich also in der Kälte verlängert, und in der Wärme verkürzt, welches wohl von der

ja

\*) Astronomie Tom. II. 2462 troisieme édition.

\*\*) Berl. astron. Jahrbuch für 1776 S. 215 Samml.

in dem Holz befindlichen Feuchtigkeit herrühren mag. Die größte tägliche Veränderung gieng nicht viel über 2 Secunden, die größte Voreilung im Junius betrug in 30 Tagen 56 Secunden. Die Stange war aus Fichtenholz verfertigt. Herr Inspector *Köhler* in Dresden verfertigte eine Pendelstange aus Fichtenholz und Messing \*), wo die Theile des Messings sich zu den Theilen des Holzes wie  $7\frac{1}{2}:28$  verhielten. Das Holz wurde noch zu lang gefunden, denn die Uhr gieng bey zunehmender Wärme noch etwas zu geschwinde.

### §. 105.

Graham machte mehrere Versuche mit einer Art von *Queksilberthermometer*, das er an dem Pendel anbrachte, um durch das Steigen des Queksilbers bey der Wärme den Mittelpunkt des Schwungs um eben so viel zu erhöhen, als er durch die Ausdehnung der Pendelstange herabgerückt worden war, und bey der Erkältung ebenfalls den Mittelpunkt des Schwungs in derselben Entfernung von dem Aufhängungspunct zu erhalten. Er zog aber nachher dieser Art von Compensation das von *Harrison* schon im Jahr 1726 erfundene Compensationsspendel vor, und verfertigte eines nach dieser Einrichtung 1740. Man nennt diese Pendel *rostförmige* Pendel (*gridiron pendulums*) weil sie aus mehreren mit einander parallel laufenden und durch Querbande verbundenen Stangen bestehen, die ihnen die Gestalt

\*) Berl. astron. Jahrbuch f. 1782. S. 150. Samml.



Gestalt eines Rostes geben. Beschreibungen von diesen Compensationsspendeln geben la Lande und Bérthoud \*); sie bestehen aus fünf *eisernen* und vier *messingenen* Stangen, die so mit einander verbunden sind, daß die messingenen Stangen die Linse um eben so viel erhöhen, als sie durch die eisernen Stangen herabgelassen wird, wenn durch die Wärme diese Stangen ausgedehnt werden. Man hat jezo etwas einfachere Compensationsspendel, zu welchen nur fünf Stangen erfordert werden, zwey von *Zink* und drey von *Eisen*. Auf der Herzoglichen Sternwarte in Gotha befindet sich eine vortrefliche von *Arnold* gefertigte Pendeluhr, die mit einem solchen aus Eisen und Zink zusammengesetzten Pendel versehen ist. Die 45ste Figur Taf. VI. stellt dieses Pendel nach den vom Herrn *von Zach* mir mitgetheilten Abmessungen vor. An der Stahlfeder *fc* hängt die eiserne Stange *cp*. Diese trägt vermittelst des Querstücks *qq* bey *p* die beyden Zinkstangen *qq, qq*, welche vermittelst des Querstücks *a* die beyden eisernen Stangen *rr, rr* unterstützen, die durch das Stück *d* mit einander verbunden sind. Die Linse ist in der Mitte durchbrochen, und stellt zwey Abschnitte von Linsen vor, die nur bey *eg, hi* und vermittelst der Brücke *t* mit einander zusammenhängen. Eine Schraube *kl*, deren Mutter in dem Stück *d* ist, unterstützt mit ihrem Kopf *k* die Linse, und dient zur Auf- und Nie-

\*) Astronomie T. II. 2463. et suiv. F. Bérthoud Essai sur l'horlogerie.

Niederbewegung derselben. Weil nun die Ausdehnung des Zinks durch die Wärme viel größer ist als die des Eisens, so werden sich bey zunehmender Wärme die beyden Zinkstangen mehr ausdehnen, als die Eisenstange  $cp$ , folglich wird das Stük  $a$  in die Höhe gehoben; allein die eisernen Stangen  $rr, rr$  und die Schraube  $kl$ , die die Linse tragen, dehnen sich ebenfalls aus, und bringen die Linse wieder tiefer herunter, und zwar wenn die eisernen Stangen das gehörige Verhältniß gegen die von Zink haben, genau um eben so viel, als das Querstück  $a$  erhoben wurde. Die

	p. Z.	Lin.
Länge der Stahlfeder $fc$ ist	=	0 11,0
Länge der Eisenstange $cq$	=	35 11,8
— der Zinkstangen $qq$	=	21 4,0
— der Eisenstangen $rr$	=	22 11,8

Sowohl die Eisen- als Zinkstangen sind cylindrisch, erstere 2,7 letztere 4,4 Lin. dik. Die Stangen sind noch durch ein Querband  $mn$  mit einander verbunden, das mit den Stangen  $rr, rr$ , durch Stifte verbunden ist, den Stangen  $qq, qq, cp$  aber eine freye Bewegung gestattet. Die Stangen  $rr, rr$  sind mit den Querstücken  $a$  und  $d$  durch Stifte verbunden, und machen mit denselben eine zusammenhängende Rahme aus, und eben so die Zinkstangen mit den Stücken  $a$  und  $b$ . In letzterem steckt die eiserne Stange  $cp$ , und ist durch einen Stift befestigt, geht durch ein Loch in dem Querstück  $a$ , und hat daselbst eine freye Bewegung. Alle fünf Stangen liegen in einer Ebene, nemlich in der Ebene des Schwungs.

## §. 95.

Man hat bemerkt, daß der Gang der Uhr eine Störung leidet, wenn das Uhrgewicht der Linse gegenüber zu stehen kommt, die man der Gravitation des Gewichts gegen die Linse zuschreibt. Deswegen führte man die Schnur über Rollen an die hintere Seite des Pfeilers, an welchem die Uhr befestigt ist, und ließ daselbst das Uhrgewicht herabhängen. Auf der Herzoglichen Sternwarte in Gotha ist die Einrichtung dazu gemacht, daß man das Gewicht in eine in den Boden gemachte Hölung hinunter lassen kann, so daß das Gewicht auch wenn die Uhr aufgezogen ist nicht über die Fläche des Bodens hervorkommt. Ich habe an meiner Uhr bemerkt, daß das Uhrgewicht in eine oscillirende Bewegung kam, wenn es der Linse nahe war. Diese Bewegung war am stärksten, wenn der Schwerpunkt des Gewichts schon gegen vier Zolle unter dem Mittelpunkt der Linse war. An dieser Stelle gab dieses Gewicht mit seiner Schnur ein mit dem Uhrpendel gleichzeitiges Pendel ab, wo also jenes durch das letztere immer beschleunigt wurde, welches nicht der Fall war, wenn das Gewicht dem Mittelpunkt der Linse gerade gegenüber stand, und seine Schwünge in kürzerer Zeit machte, als das Uhrpendel, daher dieses der Bewegung des Gewichts zuweilen entgegenwirkte. *Emery* in London hat ähnliche Bewegungen an einem Pendel bemerkt, das er nahe bey einem in Bewegung gesetzten Pendel aufgehängt hatte.

## §. 107.

Die Vervollkomnung der tragbaren Uhren war noch weit größern Schwierigkeiten unterworfen. Die Kraft der Hauptfeder, wodurch das Räderwerk in Bewegung gesetzt wird, nimmt mit dem Ablaufen der Uhr ab, wodurch ihr Gang immer langsamer wird. Zuerst suchte man den Zug der Feder durch eine an dem letzten Rad angebrachte excentrische Scheibe auf welche eine Feder drückte, die der Hauptfeder, wenn die Uhr aufgezogen war, mehr als gegen dem Ablaufen der Uhr hin entgegenwirkte, gleichförmig zu machen. Besser bewerkstelligte man dieses vermittelst einer an dem letzten Rad angebrachten conischen Walze, auf welche sich eine mit der Trommel, in welche die Feder eingeschlossen ist, verbundene Kette aufwickelt, so daß die Feder vermittelst der Kette bey ihrer anfänglichen stärkern Spannung auf einen kürzern Hebelsarm wirkt, der sich in demselben Verhältniß verlängert, in welchem die Kraft der Feder bey dem Ablaufen der Uhr abnimmt. Graham erfand ein Stoßwerk, das aus einem hohlen Halbcylinder von Stahl besteht, an dessen Axe die Unruhe befestigt ist, und dessen beyde Schneiden durch die schief gearbeiteten Zähne des Steigrades bald auf diese, bald auf jene Seite abwechselnd getrieben werden. Nach jedem Schlag fällt ein Zahn des Steigrades auf die innere hohle oder äußere convexe Fläche des Cylinders so auf, daß die Richtung seines Druks nach der Axe des Cylinders geht. Diese Einrichtung machte

te die conische Walze entbehrllich, wenn man eine Uhr blos zum gewöhnlichen Gebrauch verlangte. In einem weit höhern Grad leisten dieses die von *Mudge* in London gegen das Jahr 1760 erfundenen *freyen Stosswerke*, welche die Eigenschaft haben, daß die Unruhe, nachdem sie durch das Räderwerk einen Stoß zur Fortsetzung ihrer Bewegung erhalten hat, jedesmal ganz von dem Räderwerk absondert *freye* Schwingungen macht. Versuche zeigen, daß man bey diesen Uhren die conische Walze zur Abgleichung der Feder entbehren könnte; zu mehrerer Sicherheit bringt man sie aber dennoch an. *Harrison* brachte bey seiner Uhr an dem nächsten Rade nach dem Steigrad eine feine Feder an, die immer nach einem Verfluß von 2 Sekunden wieder durch die Hauptfeder aufgezogen wurde, um die bey seinem Stosswerk, das im Grunde die bey Taschenuhren noch gewöhnliche Lappenspindel ist, nothwendige gleiche Kraft des Steigrades zu erhalten. *Mudge* hält diese Einrichtung für einen Behelf schlechter Arbeiter, wenn man ein gutes freyes Stosswerk an der Uhr anbringt.

### §. 108.

Nun war aber noch eine Störung des gleichförmigen Ganges der Uhr aus dem Wege zu räumen, welche die Uhr durch die Abwechselung der Wärme und Kälte leidet, die auf tragbare Uhren mit der Spiralfeder einen weit stärkern Einfluß hat als auf die Pendeluhren. Denn die Schwere, welche an dem-

selben Ort der Erde immer gleich groß ist, wird hier an der Unruhe durch die Spiralfeder ersetzt, deren Kraft sich mit den Abwechselungen der Temperatur der Luft ändert. Das Moment der Trägheit der Unruhe ist denselben Wirkungen ausgesetzt. Da die Kraft der Spiralfeder mit ihrer Verkürzung oder Verlängerung, und damit auch die Anzahl der Schwünge der Unruhe in einer gegebenen Zeit wächst oder abnimmt, so brachte Harrison an seiner Uhr eine Vorrichtung an, wodurch die Spiralfeder bey zunehmender Wärme verkürzt, bey abnehmender verlängert wurde. Die Bewegung wurde durch zwey aufeinander genietete Bleche von Stahl und Messing, hervorgebracht; der aus den beyden Metallen zusammengesetzte Streifen mußte sich, wenn er bey einer gewissen Temperatur gerade war, bey einer Veränderung derselben wegen der ungleichen Ausdehnung der Metalle krümmen, so wie sich ein trockenes Brett krümmt, wenn man es auf der einen Seite naß macht. *Emery* bringt aber die Compensation wegen der Wärme und Kälte durch Veränderung des Moments der Trägheit der Unruhe hervor, indem er zwey kleine messingene Gewichte an den beyden Endpuncten eines Durchmessers vermittelst eines nach *Harrisons*' Methode aus Messing und Stahl zusammengesetzten schlangenförmig gebogenen Streifens anbringt, die daher ihren Abstand von dem Mittelpunct der Unruhe nach den verschiedenen Graden der Wärme gehörig ändern. An den Endpuncten des auf jenem  
senk-

senkrechten Durchmessers befinden sich zwey ähnliche Gewichte, die zur Regulirung der Uhr dienen, und deswegen sich in Schrauben endigen, um sie dem Mittelpunct der Unruhe näher zu bringen oder weiter davon zu entfernen. Zu welchem großen Grad der Vollkommenheit man diese Uhren, die man Zeithalter (Timekeeper) oder Chronometer nennt, gebracht habe, kann man aus den vielen Beweisen, die Herr *von Zach* in H. Prof. *Bode* astron. Jahrbücher eingerückt hat, sehen. Howells in London hat kürzlich einige Vorthelle an seinen Chronometern angebracht, die auf eine verlängerte Dauer der Richtigkeit ihrer Bewegung einen merklichen Einfluß haben. Ein Timekeeper von Howells kostet 100 Guin.

### *Berichtigung der Uhr.*

#### §. 109.

Die Zeit einer Beobachtung wird nach *wahrer* oder nach *mittlerer Sonnenzeit* oder nach *Sternzeit* angegeben; eine von diesen dreien kann leicht in die andere verwandelt werden. Man bekommt sie, wenn man weiß, was die Uhr zeigte, da die Sonne oder ein Stern, dessen Lage auf der Himmelskugel man kennt, durch den Mittagskreis gieng, und was sie in dem Augenblick der Beobachtung zeigte, vorausgesetzt daß 24 Stunden der Uhr genau einen wahren Sonnentag oder einen mitlern oder Sterntag ausmachen, oder das Vor-eilen der Uhr in 24 Stunden gegeben sey. Da ein wahrer Sonnentag nicht immer von gleicher



Länge ist, so kann eine gleichförmig gehende Pendeluhr nicht immer wahre Zeit zeigen, sondern sie wird der wahren Zeit bald voraus-eilen, bald gegen dieselbe zuückbleiben. Man hat zwar Uhren so eingerichtet, daß sie ihren Gang der Ungleichheit der wahren Sonnentage gemäß änderten, oder durch sehr zusammengesetzte Räderwerke mittlere und wahre Zeit zugleich angaben. Allein solche Uhren sind nicht allein sehr entbehrlich, sondern auch zu astronomischen Beobachtungen nicht brauchbar, weil es nicht möglich ist, ihnen die gehörige Genauigkeit zu geben.

Zur Beobachtung der geraden Aufsteigung der Sterne sind Uhren die man nach Sternzeit gehen läßt, besonders bequem; man findet sie daher auch auf allen guten Sternwarten. Zu astronomischen Beobachtungen, die man zur Bestimmung der geographischen Lage der Oerter anstellt, scheinen mir, besonders für einen reisenden Beobachter, Uhren die nach mittlerer Sonnenzeit gehen bequemer.

*Bestimmung der Zeit des Durchgangs eines Sterns durch den Mittagskreis.*

§. 110.

Das leichteste Mittel zur Bestimmung der Zeit der Culmination eines Sterns sind *correspondirende Höhen*. Man mißt nemlich eines Sterns Höhe vor seinem Durchgang durch den Mittagskreis und bemerkt die Zeit der Uhr, da der Stern diese Höhe erreichte. Nach seinem Durchgang durch den Mittagskreis wartet

wartet man die Zeit ab, da der Stern wieder dieselbe Höhe erreicht, so ligt der Augenblick des Durchgangs des Sterns durch den Mittagskreis in der Mitte zwischen den beyden Augenblicken, da der Stern vor und nach seiner Culmination dieselbe Höhe hatte. Denn die Höhe eines Sterns wird durch den Stundenwinkel, die Pohlhöhe und durch seine Abweichung bestimmt, bleiben die beyden letzteren Stüke ungeändert, so gehören gleichen Höhen gleiche Stundenwinkel zu, folglich liegt der Augenblick der Culmination in der Mitte zwischen den beyden Zeitpuncten, da der Stern dieselbe Höhe hatte. Man sieht hieraus, daß man die Höhen selbst nicht zu wissen braucht, sondern nur von ihrer Gleichheit muß versichert seyn; der Gang der Uhr wird zwischen den beyden Beobachtungen als gleichförmig vorausgesetzt. Um die Zeit der Culmination desto sicherer zu erhalten, nimmt man Vor- und Nachmittags mehrere Höhen, und leitet aus jedem Paar die Zeit der Culmination her, ihre Uebereinstimmungen unter einander zeigen die Genauigkeit der Beobachtungen an, und man nimmt, wenn sie von einander verschieden sind das arithmetische Mittel aus allen, das heißt, man dividirt ihre Summe durch ihre Anzahl.

### §. III.

Wenn man correspondirende Höhen der Sonne nimmt, so sind die zu gleichen Höhen gehörende Stundenwinkel einander nicht gleich, weil sich die Abweichung der Sonne bestän-

beständig ändert, Es seye die Höhe der Sonne  $\hat{=} Sh$  Fig. 46. Taf. IV.  $\hat{=} h$ , Polhöhe  $\hat{=} PO = \varphi$ , Abweichung der Sonne  $\hat{=} \delta$ , so hat man in dem sphärischen Dreyek die drey Seiten  $Pz = 90^\circ - \varphi$ ,  $Ps = 90^\circ - \delta$ ,  $Zs = 90^\circ - h$ . Der Stundenwinkel  $ZPs = t$ , folglich

$$\text{I. } \sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

Des Nachmittags seye die Abweichung der Sonne  $\hat{=} d$ , ihre Höhe der vormittägigen  $h$  gleich, der dazu gehörige Stundenwinkel  $\hat{=} T$ , so ist wiederum

$$\text{II. } \sin h = \sin \varphi \sin d + \cos \varphi \cos d \cos T$$

$$\text{also aus I. } \cos t = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$$

$$\text{aus II. } \cos T = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin d}{\cos \varphi \cos d}$$

$\cos T$  wird kleiner als  $\cos t$  und also  $T$  größer als  $t$  wenn  $d$  größer ist als  $\delta$ . Zieht man die zweyte Gleichung von der ersten ab, so hat man

$$\begin{aligned} \cos t - \cos T &= \\ \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta} - \frac{\sin h - \sin \varphi \sin d}{\cos \varphi \cos d} &= \\ = \frac{\sin h (\cos d - \cos \delta) + \sin \varphi (\sin d \cos \delta - \cos d \sin \delta)}{\cos \varphi \cos \delta \cos d} \end{aligned}$$

$$\text{oder } 2 \sin \left( \frac{T-t}{2} \right) \sin \left( \frac{T+t}{2} \right) =$$

$$\frac{(\sin \varphi - \sin h \sin \delta) \sin(d-\delta) - 2 \sin h \cos \delta \sin \left( \frac{d-\delta}{2} \right)^2}{\cos \varphi \cos \delta \cos d}$$

Nun beträgt die größte tägliche Aenderung der Abweichung der Sonne  $23' 42''$  und die Zwischen-

schenzeit der Beobachtungen höchstens 12 St.  
(einen Fall ausgenommen, der in der Folge  
wird betrachtet werden), also  $\frac{d-\delta}{2}$  nicht  
mehr als 5' 55"

$$\text{aber } \text{Lg} \sin\left(\frac{d-\delta}{2}\right)^2 = 14,4716060 - 20$$

$$\text{Lg} \frac{1}{e} = 5,3144251 \quad (\S 85)$$

$$\hline 0,7860311 - 1$$

gehört zu 0,61 Sec. welches nur 0,04 Sec.  
in Zeit beträgt, also kann man ohne merkli-  
chen Fehler setzen

$$2 \sin\left(\frac{T-t}{2}\right) \sin\left(\frac{T+t}{2}\right) =$$

$$\frac{(\sin \varphi - \sin h \sin \delta) \sin(d-\delta)}{\cos \varphi \cos \delta \cos d}$$

oder weil die Bogen  $\frac{T-t}{2}$ ,  $d-\delta$  klein sind

$$(T-t) \sin\left(\frac{T+t}{2}\right) = \frac{d-\delta}{\cos \varphi \cos \delta^2} (\sin \varphi - \sin h \sin \delta)$$

Aus I ist

$$\sin h \sin \delta = \sin \varphi \sin \delta^2 + \cos \varphi \sin \delta \cos \delta \cos t$$

$$\text{also } (T-t) \sin\left(\frac{T+t}{2}\right) =$$

$$\frac{d-\delta}{\cos \varphi \cos \delta^2} (\sin \varphi \cos \delta^2 - \cos \varphi \sin \delta \cos \delta \cos t)$$

$$= (d-\delta) (\text{tang} \varphi - \text{tang} \delta \cos t)$$

oder

oder weil  $\frac{T-t}{2}$  sehr nahe  $= t$  ist

$$T-t = (d-\delta) \left( \frac{\tan \varphi}{\sin t} - \tan \delta \cotang t \right)$$

um so viel wäre der Stundenwinkel nach dem Durchgang der Sonne durch den Mittagskreis größer als der vormittägliche. Nämlich man also das Mittel aus beyden Zeiten für den Mittag an, so würde dieser um die Hälfte des Bogens  $T-t$  in Zeit verwandelt zu spät angegeben. Gehen nun 24 Stunden der Uhr auf einen wahren Sonnentag, so bekommt man die Verbesserung in Zeit, wenn man  $d-\delta$  in Secunden ausdrückt, und mit 2.15 dividirt; folglich wäre die Mittagsverbesserung in Sec. ausgedrückt

$$= \frac{(d-\delta)}{30} \left( \frac{\tan \varphi}{\sin t} - \tan \delta \cotang t \right)$$

Ist die Sonne in den niedersteigenden Zeichen, so wird die Verbesserung additiv. Die Breite, Abweichung und Stundenwinkel braucht man nur bis auf einige Minuten zu wissen. Die Abweichung der Sonne sammt ihrer täglichen Aenderung bekommt man aus astronomischen Tafeln oder Kalendern, den Stundenwinkel  $t$  mit hinlänglicher Genauigkeit aus der halben Zwischenzeit der Beobachtungen \*).

§. 112.

\*) Eine sinnreiche Methode, die Zeitgleichung allein aus den Beobachtungen herzuleiten lehret H. Rittenhouse in den Transactions of the american philosophical society held at Philadelphia Vol. I. pag. 155. II. edition. De Zach tabulae motuum Solis p. 90.

# § 112

Um den Gebrauch dieser Formel zu zeigen, wende ich sie auf folgendes Beyspiel an. Ich nahm den 27. März 1794. auf der hiesigen Sternwarte mit dem zehnzolligen Sextanten von Troughton folgende correspondirende Höhen. In der ersten Columnne sind die beobachteten gedoppelten Höhen des obern Sonnenrandes, in der zweyten die Zeiten vor dem Durchgang der Sonne durch den Meridian, in der dritten die nach ihrem Durchgang, da sie die beygeschriebenen Höhen erreichte, nach der *Sheltonschen* Uhr, die nach Sternzeit geht. Weil ich diese Höhen in der Folge noch zu anderer Absicht gebrauchen werde, so bemerke ich, daß der Fehler des Zeigers (§. 68.) von 1' 0" zu den beobachteten Höhen addirt werden muß.

°	'	U.	'	"	U.	'	"
45	50	20	46	9,0	4	16	4,0
46	40	—	49	9,0	—	13	3,0
	50	—	49	45,0	—	12	28,0
47	0	—	50	20,0	—	11	51,0
—	10	—	50	55,0	—	11	15,0
—	20	—	51	34,0	—	10	38,0
—	30	—	52	9,5	—	10	2,5
—	40	—	52	45,0	—	9	25,5
—	50	—	53	22,0	—	8	48,0
48	0	—	53	59,0	—	8	13,5
—	10	—	54	35,0	—	7	36,0
—	30	—	55	48,0	—	6	24,0
—	40	—	56	25,0	—	5	47,5
—	50	—	57	1,0	—	5	10,5
49	0	—	57	38,0	—	4	34,0
—	10	—	58	15,0	—	3	56,0
—	20	—	58	52,0	—	3	19,0
—	30	—	59	28,0	—	2	43,0
—	50	21	0	43,0	4	1	29,0

Zieht

Zieht man die Zeit der ersten Beobachtung von 24 St. ab, so erhält man 3 St. 13' 51",0 als die Zeit welche von dem Augenblick der Beobachtung bis zu dem Zeitpunkt da die Uhr 24 oder 0 zeigte verflossen ist; folglich wäre, die Veränderung der Abweichung der Sonne = 0 gesetzt, der gedoppelte Stundenwinkel =  $3^{\text{St.}} 13' 51",0 + 4^{\text{St.}} 16' 4",0 = 7^{\text{St.}} 29' 55",0$ ; folglich Stundenwinkel in Zeit =  $3^{\text{St.}} 44' 57",5$  dieses zu der Zeit der vormittäglichen Beobachtung  $20^{\text{h.}} 46' 9",0$  addirt, gibt Zeit der Uhr im Mittag  $24^{\text{U.}} 31' 6",5$ . Oder man addire zu der nachmittäglichen Beobachtung 24 Stunden (weil von 24 oder 0 Uhr an von neuem gezählt wird) und nehme das arithmetische Mittel aus dieser Zeit und der vormittäglichen, so hat man die Zeit der Uhr im Mittag, an welcher noch die oben gezeigte Verbesserung angebracht werden muß.

Zeit der Uhr Vormitt.	20 <sup>U.</sup>	46'	9",0
— — — Nachm.	28	16	4,0
Summe	49	2	13,0
Mittel	24	31	6,5 (unverbesserter Mittag)

beyde Zeiten von einander abgezogen geben

Zwischenzeit der

Beobachtung  $7^{\text{St.}} 29' 55"$

halbe Zwischen-

zeit  $3 \quad 44 \quad 57,5$

betr. in Graden  $56^{\circ} \quad 14' \quad 22,5$  (15 Grade auf eine Stunde gerechnet)

$\therefore \phi = 51 \quad 31 \quad 54$

(Da die Uhr nach Sternzeit geht, so gibt eine Stunde nicht ganz  $15^{\circ}$  Veränderung des Stunden-



denwinkels der Sonne; dieses beträgt für 3<sup>st</sup>. 44' 57",5, 9"15" um welches  $t$  kleiner müßte angenommen werden. Allein diese Aenderung des Stundenwinkels bringt keine merkliche Aenderung in der Mittagsverbesserung hervor).

Die Abweichung der Sonne im Mittag für den Berliner Meridian aus astr. Jahrbuch für 1794 ist  $= 2^{\circ} 47' 5''$  die man hier ungeändert beybehalten kann. Die tägliche Aenderung der Abweichung der Sonne vom 26 auf den 27. beträgt 23' 27"; vom 27 auf den 28 aber 23' 25", folglich im Mittel 23' 26", daher ihre Veränderung in  $7\frac{1}{2}$  Stunden  $= 439",3 = d - \delta$ .

$$\frac{d - \delta}{30} = 14",6433$$

$$\text{Lg } \frac{d - \delta}{30} = 1,1656390$$

$$\text{Lg Tang } \varphi = 0,0998875$$

$$\hline 1,2655265$$

$$\text{Lg sin } t = 0,9197901 - 1$$

$$\hline 1,3457364 \text{ gehört zu } 22",168$$

$$\text{Lg } \frac{d - \delta}{30} = 1,1656390$$

$$\text{Lg } T_g \delta = 8,6870013 - 10$$

$$\text{Lg Cot } gt = 9,8250749 - 10$$

$$\hline 0,6777152 - 1 \text{ gehört zu } 0,476$$

$$\text{Unterschied} = 21",692$$

Da nun die Sonne in den aufsteigenden Zeichen war, so muß diese Verbesserung von dem Mittel abgezogen werden, folglich ist die

M

Zeit

Zeit der Uhr im wahren Mittag  $0^u. 31' 6'',5 - 21'',692 = 0^u. 30' 44'',808$ .

*Anmerkung.* Wenn man die Mittagsverbesserung genau haben wollte, so müßte man obige Mittagsverbesserung noch in dem Verhältniß von 24 St. : 24 St.  $3' 56''$  vergrößern, weil die Uhr in einem Sonnentag 24 St.  $3' 56''$  zeigte, und wenn man ihre tägliche Voreilung von 1,8 Sec. noch in Rechnung bringen wollte, in dem Verhältniß von 24 St. : 24 St.  $3' 57'',8$  dieses macht die Mittagsverbesserung  $= 21'',751$ . Man sieht hieraus wie man rechnen müßte, wenn der Gang der Uhr merklich von der mitlern Zeit abweiche.

### §. 113.

Wenn man mehrere correspondirende Höhen genommen hat, so hat man nicht nöthig die Mittagsverbesserung für jedes Paar besonders zu berechnen. Man nimmt aus den verschiedenen Resultaten, welche jedes Paar Höhen gab, das Mittel und berechnet die Verbesserung des Mittags für dieses Mittel, indem man die halbe Zwischenzeit zweyer in der Mitte liegender Beobachtungen gebraucht, weil für kleine Zwischenzeiten die Verbesserung des Mittags beynahe der Zeit proportional ist. So geben obige Beobachtungen den unverbesserten Mittag im Mittel um  $0^u. 31' 5'',8947$ ; die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen für dieses Mittel  $3^st 37'$ , vermittelt welcher man die Mittagsverbesserung berechnet.

Aus der Formel §. 111. siehet man leicht, daß man eine Tafel für die Mittagsverbesserung berechnen kann. Die Abweichung der Sonne und die tägliche Veränderung derselben

ben hängen von der Länge der Sonne ab, also kann man für eine gegebene Breite eine Tafel berechnen, welche die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen und die Länge der Sonne zu Argumenten hat. Für jede Breite wird eine solche Tafel brauchbar, wenn man für jeden Theil der Mittagsverbesserung eine eigene Tafel berechnet, und den Zähler des ersten Glieds  $= 1$  macht. Die erste Tafel

gibt alsdann die Werthe  $\frac{d-\delta}{30 \sin t}$  die zweyte  $\frac{(d-\delta) \tan \delta}{30 \tan t}$ . Was man aus der ersten Ta-

fel findet, muß man mit der Tangente der Breite, unter welcher man die Höhen genommen hat, multipliciren. Weil die beyden Theile einerley Argumente haben, so kann man sie auch in eine Tafel neben einander setzen. Die Argumente bekommen ihre gehörigen Zeichen, woran man siehet, ob man die Verbesserung addiren oder abziehen muß. Dergleichen Tafeln findet man in den meisten Ephemeriden, in der Berliner *Sammlung astronomischer Tafeln* I. Band S. 291 und 292. und besonders genau und ausführlich in Herrn von Zach *Tabulis motuum Solis etc. Gothae 1792* Tab. XXXVIII. pag. CX. et seq. Wie solche Tafeln berechnet werden lehrt H. Hofrath Kästner. *Astr. Abhandlungen* I. Samml. S. 248. Wegen der Veränderung der Schiefe der Ecliptic bedürfen diese Tafeln mit der Zeit einer Verbesserung.

In Tab. XXXVIII. Tab. motuum Solis findet man mit der Länge der Sonne  $0^{\text{h}} 7^{\text{m}} 0^{\text{s}}$  und der halben Zwischenzeit der Beobachtungen  $3^{\text{h}} 37^{\text{m}}$  den ersten Theil der Mittagsverbesserung  $= -17'',40$  welches mit der Tangente der Breite multiplicirt  $-21'',90$  gibt. Der zweyte Theil ist  $+0'',49$  also die Mittagsverbesserung  $= -21'',90 + 0'',49 = -21'',41$  wozu noch die Acceleration  $0'',06$  kommt, weil die Uhr nach Sternzeit gieng. Daher ist die Zeit der Uhr im wahren Mittag  $= 0^{\text{h}} 31' 5'',89 - 21'',47 = 0^{\text{h}} 30' 44'',42$  im Mittel.

§. 114.

Es ist noch zu untersuchen, wie weit vom Mittage die Höhen genommen werden müssen, damit die in der Messung derselben begangenen Fehler den geringsten Einfluß auf die Zeitbestimmung haben. Wenn sich die Höhe eines Sterns sehr langsam ändert, so wird ein kleiner Fehler, den man in der Stellung des Instruments auf die vormittägliche Höhe und in der Beobachtung selbst begeht, einen merklichen Einfluß auf die Zeitbestimmung haben. Man muß daher, wenn andere Umstände es erlauben, die Höhen zu der Zeit beobachten, da sie sich am schnellsten ändern. Die Geschwindigkeit der Höhenänderung wird desto größer seyn, je kleiner der Winkel ist, welchen die Richtung, in der sich der Stern bewegt, mit dem Verticalkreis macht, oder je größer der parallactische Winkel *PSZ* Fig. 46. Taf. IV. ist. Wenn die §. 111. gebrauchten Buchstaben beybehalten werden, so gehört  
der

der größte parallactische Winkel einer Höhe  $h$  zu, deren sinus  $= \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}$  \*). Setzt man diesen Werth in die obige Gleichung (§. 111.) zwischen Polhöhe, Abweichung, Stundenwinkel und Höhe, so findet sich

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \delta} = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

$$\text{also } \sin \delta = \sin \varphi^2 \sin \delta + \sin \varphi \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

$$(1 - \sin \varphi^2) \sin \delta = \sin \varphi \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

$$\sin \delta = \tan \varphi \cos \delta \cos t$$

$$\text{folglich } \cos t = \frac{\sin \delta}{\cos \delta \tan \varphi} = \tan \delta \cot \varphi$$

Vermittelst dieser Formel findet man also die Zeit, zu welcher man unter der Breite  $\varphi$  einen Stern, dessen Abweichung  $= \delta$  ist, beobachten muß, wenn die Fehler in der Höhenmessung den kleinsten Einfluß auf die Zeitbestimmung haben sollen.

Der allgemeine Ausdruck für das Azimuth

$$a \text{ ist } \cos a = \frac{\sin \delta - \sin h \sin \varphi}{\cos h \cos \varphi}. \quad \text{Setzt man}$$

$$\text{hier } \sin h = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi} \text{ so wird}$$

$$\cos a = \frac{\sin \delta - \sin \delta}{\cos h \cos \varphi} = \frac{0}{\cos h \cos \varphi}$$

So lange  $\delta$  kleiner ist als  $\varphi$ , kann  $h$  nicht gleich 90 Gr. folglich  $\cos h$  nicht  $= 0$  werden, weil  $h$  nicht größer werden kann als  $90^\circ - \varphi + \delta$ .

Folglich verändert sich die Höhe eines Sterns, dessen Abweichung kleiner ist als die Pol-

\*) Kästners astron. Abhandl. I. Samml. S. 134. u. f.

Polhöhe, alsdann am geschwindesten, wenn sein Azimuth  $= 90^\circ$  ist, oder wenn er durch den ersten Verticalkreis geht.

### §. 115.

Nun kann der Fehler, welchen eine unrichtig gemessene Höhe in der Zeitbestimmung selbst unter den günstigsten Umständen hervorbringt, berechnet werden. Wenn man die Gleichung  $\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$  differentiirt, indem man  $h$  und  $t$  als veränderlich betrachtet, so kommt  $dh \cos h = -dt \sin t \cos \varphi \cos \delta$

In dem sphärischen Dreyek  $PZS$  Fig. 46 aber verhält sich

$$\sin ZS : \sin PZ = \sin ZPS : \sin PSZ$$

$$\text{oder } \cos h : \cos \varphi = \sin t : \sin p$$

$$\text{also ist } \sin p = \frac{\sin t \cos \varphi}{\cos h}$$

$$\text{folglich } dh = -dt \sin p \cos \delta$$

Für den größten parallactischen Winkel  $p$  ist das Azimuth  $= 90$  Gr. also der Sinus des größten parallactischen Winkels selbst  $= \frac{\cos \varphi}{\cos \delta}$

$$= \sin p$$

dieser Werth von  $\sin p$  in die Formel für  $dh$  gesetzt, gibt

$$dh = -dt \cos \varphi, \text{ und } dt = -dh \sec \varphi$$

Hienach könnte ein jeder Stern, den man in dem ersten Verticalkreis beobachten kann, mit gleicher Zuverlässigkeit zur Zeitbestimmung vermittelt correspondirender Höhen gebraucht werden. Wegen der Ungewissheit  
der

der Strahlenbrechung aber sind große Höhen den kleinern vorzuziehen.

Für die Breite von Göttingen ist  $\sec. \varphi = 1,607505$ . also  $dt = -1,607505. dh$  und in Zeit

$$dt = -\frac{1,607503}{15} dh = -0,107167 dh. \text{ Ein}$$

Fehler von 10 Secunden in der Messung der Höhe bringt also selbst unter den günstigsten Umständen schon 1,07 Secunden Fehler in der Zeitbestimmung hervor.

Aus der Formel  $\sin k = \frac{\sin \delta}{\sin \varphi}$  siehet man,

011

dass man einen Stern, dessen Abweichung südlich ist, nicht in dem ersten Verticalkreis beobachten kann; denn  $\sin \delta$  folglich auch  $\sin k$  werden negativ und die Höhe fällt unter den Horizont. Für einen Stern im Aequator wird  $\delta$  und also auch  $k = 0$ , und also verändert der Stern seine Höhe am geschwindesten beym Aufgehen und Untergehen.

Für eine nördliche Abweichung wird  $k$  desto größer, je größer die Abweichung ist. Ist des Sterns Abweichung der Polhöhe gleich, so geht er durch das Zenith, daselbst berührt der erste Verticalkreis den Parallelkreis, welchen der Stern beschreibt, und seine schnellste Höhenänderung geschieht am Zenith.

Da der Cosinus des Stundenwinkels für die schnellste Höhenänderung  $= \frac{Tg \delta}{Tg \varphi}$ , so darf

man die correspondirenden Höhen desto näher an dem Mittage nehmen, je größer des Sterns nördliche Abweichung ist. Dieser Co-

sinus wird negativ, also der Stundenwinkel stumpf, wenn  $\delta$  negativ oder die Abweichung südlich ist; alsdann ist aber der Stern, wie schon oben gezeigt wurde, unter dem Horizont. Man kann also keinen Stern in dem Verticalkreis beobachten, dessen Stundenwinkel größer ist als  $90^\circ$  oder 6 Stund. Weiter als 6 Stunden vom Mittage muß man daher keine correspondirende Höhen nehmen.

116

§. 99.

Wenn eines Sterns nördliche Abweichung größer ist als die Breite, so geht er bey seiner größten Höhe zwischen dem Zenith und Nordpol durch den Mittagskreis, und kommt daselbst dem ersten Vertical am nächsten aber nie in denselben. An den Parallelkreis eines solchen Sterns kann man einen Verticalkreis ziehen, der ihn berührt; in diesem Verticalkreis fällt die Richtung seiner täglichen Bewegung mit demselben zusammen, und seine Höhenänderung ist daselbst am geschwindesten. Es seye Fig. 48. Taf. VI.  $ZPR$  der nördliche Quadrant des Mittagskreises,  $QTS$  ein Parallelkreis eines Sterns, dessen nördliche Abweichung größer ist als die Breite,  $Z$  das Zenith,  $P$  der Nordpol,  $ZO$  ein Verticalkreis, der den Parallelkreis des Sterns berührt. Zieht man an den Berührungspunct  $Q$  den Abweichungskreis  $PQ$ , so hat man ein bey  $Q$  rechtwinklichtes sphärisches Dreyek  $ZPQ$ . In demselben ist

$$\cos PQ : \sin. tot. = \cos PZ : \cos ZQ$$

folg.



folglich  $\sin h = \frac{\sin \varphi}{\sin \delta}$

ferner  $\sin PZ : \sin. \text{tot.} = \sin PQ : \sin PZQ$

also  $\sin a = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi}$

endlich  $\sin. \text{tot.} : \cotg PZ = \text{Tang } PQ : \cos QPZ$

daher  $\cos t = \text{Tang } \varphi \cotg \delta$

Der parallactische Winkel ist hier  $PQZ = 90^\circ$   
folglich

$$dt = -\frac{dh}{\cos \delta} = -dh \sec. \delta. (\S. 115.)$$

Da  $\cos t = \text{Tang } \varphi \cotg \delta$ , so ist die Zeit der schnellsten Höhenänderung auch derjenigen Sterne, welche bey ihrer grösten Höhe zwischen dem Zenith und dem Pol durch den Mittagskreis gehen, weniger als 6 Stunden von ihrem obern Durchgang durch den Meridian

entfernt. Aus der Formel  $\sin a = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi}$  folgt, daß alsdann ihr Azimuth kleiner ist als  $90^\circ$  Gr. Solche Sterne sind desto unsicherer zur Zeitbestimmung zu gebrauchen, je gröser ihre Abweichung ist, weil  $dt = -dh \sec \delta$ .

### §. 117.

Wenn man correspondirende Höhen eines Sterns nimmt, der nahe am Zenith vorbey gehet, so hat man zwey Vorthelle. Erstlich ist die Beobachtung von der Veränderung der Strahlenbrechung frey, weil diese selbst nahe am Zenith sehr klein ist. Zweytens fällt die Zeit der schnellsten Höhenänderung sehr nahe an die Zeit der Culmination des Sterns,

man hat also nicht nöthig lange auf die correspondirenden Höhen zu warten, und in so kurzer Zeit ist auch keine Aenderung des Gangs der Uhr zu befürchten. Daher schlug Herr *Aubert* folgende Methode correspondirender Höhen vor \*).

Man wähle einen Stern, dessen scheinbarer Abstand vom Nordpol wenig von der Aequatorshöhe des Orts unterschieden sey. Dieser Stern wird bey seinen Höhen auf beyden Seiten des Meridians zweymal in Verticalkreise kommen, die den Parallelkreis, den der Stern beschreibt, berühren werden \*\*), und alsdann nahe an dem Meridian, dem ersten Verticalkreis und dem Zenith seyn. Nimmt man also in jenen Verticalkreisen correspondirende Höhen, so ist die Zeit zwischen beyden Beobachtungen sehr kurz, die Höhenänderung für diesen Stern am geschwindesten (§. 116.) und die Beobachtung von aller Ungleichheit und Unbeständigkeit der Stralenbrechung frey, und man darf dem Höhenmesser keine Bewegung in dem Azimuth geben, welches sonst bey correspondirenden Höhen leicht Fehler verursachen kann.

Zu Beobachtungen von dieser Art werden folgende zwey Stüke erfordert, die wohl zu bemerken sind. 1) Der Beobachter muß an dem Ocular seiner Fernröhre einen unter einem Winkel von  $45^{\circ}$  geneigten Planspiegel ha-

\*) Philosophical Transactions 1776. De Zach tabulae motuum Solis pag. 98. et seq.

\*\*) Dieses kann nur alsdann geschehen, wenn des Sterns nördliche Abweichung größer ist als die Breite §. 114.

haben, der die von dem nahe am Scheitel stehenden Stern herkommenden Lichtstrahlen unter einem rechten Winkel gegen das Auge des Beobachters zurückwirft, weil die rückwärts geneigte Lage des Körpers nicht allein die Augen schwächt, sondern auch der Genauigkeit der Beobachtung, welche sehr oft von einer bequemen Lage des Körpers abhängt, nachtheilig ist. 2) Man muß die Höhe des Fixsterns in dem Verticalkreis, welcher den Parallelkreis des Sterns berührt, das Azimuth und den Stundenwinkel vorläufig berechnen (§. 116.). Kennt man diese Stücke, so stellt man den Quadranten so, daß die bewegliche Fernröhre auf die voraus berechnete Höhe, die Ebene des Quadranten nach dem Azimuth gerichtet ist. Aus der geraden Aufsteigung des Sterns und dem Stundenwinkel kennt man die Zeit, da der Stern in das Sehfeld der Fernröhre kommt und die Beobachtungen anzustellen sind. Nun kann man den Verticalfaden an den Fixstern bringen, der ihn nicht verlassen wird, und die Antritte des Sterns an die horizontale Fäden ohne das Instrument bewegen zu dürfen sehr genau beobachten.

### §. 118.

Wenn des Sterns Abstand vom Nordpol größer ist als die Aequatorshöhe, so wird man ihn auf beyden Seiten des Mittagskreises in dem ersten Verticalkreis beobachten können (§. 115.). Stellt man des Quadranten Ebene in diesen Verticalkreis oder senkrecht auf die Mittagsfläche, so wird man die correspondiren-

renden Höhen des Sterns nehmen können, ohne den Quadranten zu bewegen, weil diese gewöhnlich etwas über 90 Grade fassen, vorausgesetzt daß der Abstand des Sterns vom Zenith den Winkel nicht übertreffe, den man auf beyden Seiten des Nullpuncts (oder des neunzigsten Grades, wenn der Quadrant Höhen angibt) messen kann. Die Zeit wird sich vermittlest eines solchen Sterns noch genauer bestimmen lassen, als nach §. 115. vermittlest eines dessen Abweichung die Breite übertrifft. Denn für diesen ist  $dt = -dh \sec \delta$  (§. 116.) für jenen  $dt = -dh \sec \phi$  (§. 115.) aber hier  $\delta > \phi$ , folglich auch der Fehler in der Höhenmessung gefährlicher bey einem Stern der zwischen dem Zenith und dem Pol seine größte Mittagshöhe erreicht, als bey einem der in dem südlichen Quadranten des Mittagskreises culminirt.

#### §. 119.

Die Methode, die Zeit der Culmination eines Sterns, der nahe am Zenith vorbey geht, durch correspondirende Höhen zu bestimmen, leitete mich auf folgende, die ich in der Ausübung sehr genau und bequem gefunden habe. Die Absehenslinie einer Fernröhre, die mit einem Fadenkreuz versehen ist, stelle ich genau vertical, und drehe die Fernröhre so um ihre Axe, daß der eine Faden in der Mittagslinie liegt, so berührt dieser Faden den Mittagskreis im Zenith, und der Augenblick der Culmination eines Sterns ist der Augenblick seines Antritts an diesen Faden. Um die

die Beobachtungen vervielfältigen zu können, spannte ich mehrere Fäden parallel mit dem Mittagsfaden auf beyden Seiten desselben in gleichen Abständen aus, so gab das Mittel aus aus zweyen Antritten an gleichweit auf beyden Seiten von dem Mittagsfaden abstehende Fäden ebenfalls den Augenblick der Culmination. Die Einrichtung der Fernröhre ist folgende. An einer starken eisernen Stange *GH* Fig. 49. Taf. VI. sind zwey Gabeln *EF*, welche die Gestalt eines *Y* haben, befestigt. In diesen liegt die Fernröhre *AB* mit ihren Bekleidungen von Glockenmetall, die genau cylindrisch gedreht sind, *C* und *D*. Die obere *D* hat einen vorstehenden Ring, damit die Fernröhre nicht herunter gleite; sie wird noch überdies durch zwey Ueberschläge, wovon der eine bey *C* gezeichnet, der bey *D* aber der Deutlichkeit wegen weggelassen ist, in ihren Lagern gehalten. Die Stüke *IK* und *LM* werden an der Mauer durch Schrauben befestigt, und die vier Schrauben *i, k, l, m*, welche conische Spitzen haben, und in ähnliche Vertiefungen in der Stange *GH* passen, dienen zur Befestigung der Stange und zugleich zur verticalen Stellung der Fernröhre. Um die Stange *GH* noch besser zu befestigen, ist die Querstange *PQ* angebracht. Senkrecht auf der Axe der Fernröhre ist eine Libelle *NO* angebracht, die man durch die Schraube *p*, deren Mutter durch eine zwischen der Querstange *no* und der Libelle *NO* liegende Spiralfeder *q* beständig angedrückt wird, berichtigen kann. Das Fadenkreuz befindet sich  
auf

auf einer viereckigten Platte, welche durch acht in dem Gehäuse *ab* befindliche Schrauben hin und her geschoben werden kann. Wenn man die Libelle *NO* der Axe der Fernröhre parallel anschraubt, so hat man zugleich die gewöhnliche Sissonsche oder Brandersche Wasserwage. Das Instrument kann also leicht auch zum Nivelliren eingerichtet werden. Nur ist hier zu bemerken, daß zu gegenwärtigen astronomischen Gebrauch die schwer zu erhaltende gleiche Dike der Cylinder *C* und *D* nicht nothwendig ist, wie bey der Wasserwage.

### §. 120.

Die Berichtigung dieses Instruments ist sehr leicht. Zuerst macht man die Absehenslinie mit der Umdrehungsaxe der Fernröhre parallel, indem man das Instrument horizontal legt, das Fadenkreuz auf einen entfernten deutlichen Punct richtet, und darauf Achtung gibt, ob der Durchschnitt des Fadenkreuzes immer auf denselben Punct trifft, wenn man die Fernröhre um ihre Axe dreht. Findet sich dieses nicht, so verschiebt man das Fadenkreuz so lange, bis der Durchschnitt desselben bey dem Umdrehen der Fernröhre um ihre Axe jenen Punct nicht mehr verläßt, so ist die Absehenslinie mit der Umdrehungsaxe der Fernröhre parallel. Nun stellt man die Fernröhre vermittelst ihres Trägers, den man durch die Schrauben *i, k, l, m* befestigt, vertical auf, und bringt die Luftblase in die Mitte der Glasröhre vermittelst der Schraube *p*, wo man ihre Stelle

Stelle bezeichnet. Hierauf dreht man die Fernröhre halb um ihre Axe, kommt die Luftblase wieder an ihre Stelle, so ist von dieser Seite keine Veränderung vorzunehmen, hat sie aber ihren Ort verändert, so verbessert man die Hälfte des Fehlers mittelst der Schraube  $p$ , die andere Hälfte mittelst der Schrauben, deren Richtung mit der Richtung der Libelle ungefähr parallel ist, also wenn die Libelle die in der Figur gezeichnete Lage hat, mittelst der Schrauben  $l$  und  $m$ . Eben so berichtigt man die Umdrehungsaxe der Fernröhre nach der auf der erstern senkrechten Richtung, bis die Luftblase ihre Zeichen nicht mehr verläßt, in welche Vertical-ebene man auch die Libelle bringen mag, so steht die Umdrehungsaxe der Fernröhre vertical, folglich auch die Absehenslinie, weil sie mit der Umdrehungsaxe parallel gemacht wurde. Geht also ein Stern durch das Zenith, so wird der Augenblick seines Durchgangs durch den Durchschnittspunct des Fadenkreuzes die Zeit seiner Culmination seyn. Geht aber ein Stern nicht genau durch das Zenith, so muß man den einen Kreuzfaden in die Mittagslinie zu bringen wissen. Dieses kann sehr leicht geschehen, wenn der Stern sehr nahe am Zenith vorbeugehet, man darf alsdann nur darauf Achtung geben, ob der Stern bey seinem Durchgang durch das Sehfeld der Fernröhre auf beyden Seiten des Mittagsfadens, den man nur nach dem Augenmaße nach dem Meridian gerichtet hat, gleichweit von dem darauf senkrechten oder Parallelfaden absteht.

Ein



Ein kleiner Fehler in der Lage des Mittagsfadens hat bey sehr kleinen Abständen vom Zenith nichts zu bedeuten. Für grölsere Zenithabstände muß man folgendes Mittel gebrauchen. An das Stük *no* Fig. 49 bringt man ein Paar Dioptern an, deren Absehenslinie man mit einem der Kreuzfäden parallel macht, indem man die Fernröhre mit ihrem Träger horizontal legt, sie nach einem an einer weissen Wand aufgehängten Bleyfaden richtet, die Absehenslinie der Diopter an *no* vermittelt eines Bleyfadens ebenfalls horizontal stellt, und das Gehäuse *ab*, in welchem die Kreuzfäden sind, so dreht, daß der eine Faden mit dem an der Wand aufgehängten Bleyfaden zusammenfällt, so ist die Absehenslinie der Dioptern mit einem der beyden Kreuzfäden parallel. Um das Gehäuse *ab* drehen zu können, ist an dasselbe eine Röhre angelöthet, welche genau in die Röhre *AC* paßt, und durch Friction darin gehalten wird. Man kann alsdann eine Mittagslinie ziehen, nach welcher man das Diopterlineal *no* richtet \*).

#### §. 121.

Daß diese 'Mittagslinie nicht sehr genau gezogen seyn müsse, wird folgende Untersuchung zeigen. Wenn der Faden nicht genau in der Mittagslinie liegt, und also kein Stük des Mittagskreises ist, so kann man ihn doch als ein Stük eines Verticalkreises betrachten, dessen Azimuth, die Abweichung des Fadens  
von

\*) Wie man eine Mittagslinie zieht wird unten gezeigt werden (§. 130, 131.)



von der Mittagslinie ist. Diese Abweichung seye  $= \xi$  Sec., des Sterns Höhe  $= \eta$ , seine Abweichung  $= \delta$ , so ist die Zeit seiner Culmination von der Zeit seines Durchgangs durch den Faden verschieden  $\frac{\xi \cos \eta}{15 \cos \delta}$  Secunden \*). Es seye  $\delta = 51^\circ 0''$ , Polhöhe  $= 51^\circ 32'$ , so ist  $\eta = 89^\circ 28'$

$$\begin{array}{r} \text{Lg} \cos \delta = 9,7988718 \\ \text{Lg} 15 = 1,1760913 \\ \hline 10,9749631 \\ \text{Lg} \cos \eta = 17,9688698 - 10 \\ \hline 6,9939067 - 10 \end{array}$$

gehört zu 0,000986.

Folglich beträgt der Fehler für einen Stern, der 32 Minuten von dem Scheitel absteht, 0,000986.  $\xi$  Secunden, also wenn  $\xi$  auch  $= 10$  Min. wäre, nur 0,59 Secunden.

Vermittelst eines beweglichen Fadens, wie bey Mikrometern, könnte man des Sterns Abstand von dem unbeweglichen Parallelfaden bey seinen Antritten an den ersten und dritten Faden messen. Der Unterschied beyder Abstände durch den Abstand der beyden äußersten Fäden in Theilen eines größten Kreises dividirt gäbe die Tangente des Winkels  $\xi$ . Man könnte alsdann mit einem solchen Mikrometer zugleich Abstände vom Zenith messen, folglich die Breite bestimmen. Vermittelst eines Nezes von 45 Graden oder eines Rautennezes liesse sich ebenfalls beydes bewerk-

\*) Kästners astron. Abhandl. I. Samml. S. 193.

werkstelligen. Kästners astron. Abhandl. II. Samml. S. 281. u. f. S. 286. u. f.

### §. 122.

Wenn die Absehenslinie der Fernröhre nicht genau berichtigt wäre, so könnte man doch die Zeit der Culmination eines Sters nach der Methode, welche Herr *von Zach* in seinen Sonnentafeln pag. 134. lehrt, bestimmen. Man beobachtet den Antritt des Sterns an den ersten und zweyten Faden, dreht alsdann die Fernröhre halb um ihre Axe, und beobachtet den Stern am dritten Faden, der eigentlich wieder der erste ist. Das Mittel aus den beyden äussersten Antritten gibt alsdann die Zeit der Culmination, welche mit der Zeit des Antritts an den mittlern Faden verglichen den Fehler der Absehenslinie gibt.

Wenn die Fäden nicht fein sind, so wird der Stern, wenn er hinter einen Faden kommt, ganz verschwinden. Alsdann muß man an jedem Faden so wohl Ein- als Austritte beobachten, und aus beyden ein Mittel nehmen. Die Zeit, wie lange ein Stern auf demselben Parallelkreis hinter dem Faden bleibt, hängt von seiner Gröſse, und wenn man denselben Stern zu verschiedenen Zeiten beobachtet, von der Heiterkeit des Himmels und der Nähe der Sonne ab.

*Beyspiel.* Denn 24. März 1794 machte ich vermittelst einer nach §. 119. eingerichteten Fernröhre auf der hiesigen Sternwarte folgende Beobachtungen des Sterns  $\gamma$  im Drachen, nachdem ich die Absehenslinie der Fernröhre bey-

beynahe ihrer Umdrehungsaxe parallel gemacht, letztere aber genau berichtigt hatte.

	I. Faden	II. Faden	
Antritte	17 <sup>U</sup> . 55' 35",2	17 <sup>U</sup> . 56' 47",0	als die Libelle gegen Mittag gekehrt war.
Austritte	— 55 38,0	— 56 50,0	
A) Mittel	17 55 26,6	17 56 48,5	
Antr.	17 57 51,2		als die Libelle gegen Norden gekehrt war.
Austr.	— — 54,0		
B) Mittel	17 57 52,6		

Das Mittel aus *A* und *B* = 17<sup>U</sup>. 56' 44",6 Culmin.  $\gamma$  Draconis

Der Stern war am mittlern 17 56' 48,5

Faden um —————

Fehler des mittlern Fadens = 3",9

Folglich müssen von der Zeit des Durchgangs durch den mittlern Faden 3,9 Sec. abgezogen werden, wenn die Libelle gegen Mittag gekehrt ist, und dazu addirt werden, wenn sich die Libelle auf der Nordseite der Fernröhre befindet, um die Zeit der Culmination zu haben.

### §. 123.

Oefters wird man durch die Witterung gehindert, daß man an einem Tag keine correspondirende Höhen bekommen kann. Hat man aber an einem Nachmittag und dem darauf zunächst folgenden Vormittag gleiche Höhen der Sonne genommen, so kann man daraus die Zeit der Mitternacht bestimmen. Es seye Fig. 47. Taf. VI. *Z* das Zenith *S s K* ein Höhenkreis, *P* der Pol des Aequators, *OW* ein Theil des Horizonts, *ZPR* der nördliche Quadrant des Meridians. Die nachmittägige

N 2

Höhe

Höhe seye in  $K$ , die an dem nächstfolgenden Vormittag in  $S$  beobachtet. Wären nun die Polardistanzen  $PK, PS$  einander gleich, so wären auch die Stundenwinkel  $ZPK, ZPS$  und ihre Supplemente  $RPK, RPS$  einander gleich, und die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen zu der Zeit der Beobachtung in  $K$  addirt gäbe die Zeit der Mitternacht. Hat aber die Abweichung in der Zwischenzeit beyder Beobachtungen um  $sq$  zugenommen, so ist der Winkel  $ZPS$  gröfser als  $ZPK$  um den Winkel  $SP_s$ , wenn man  $Ps = PK$  macht. Der Winkel  $SP_s$  ist

$$= sq \left( \frac{\cotg PZ}{\sin ZPs} - \frac{\cotg Ps}{\tg ZPs} \right); (\S. 111.)$$

folglich

$$\begin{aligned} RPS &= 180^\circ - ZPS = 180^\circ - ZPs - SP_s \\ &= 180^\circ - ZPs - sq \left( \frac{\cotg PZ}{\sin ZPs} - \frac{\cotg Ps}{\tg ZPs} \right) \\ \frac{RPS + RPK}{2} &= 180^\circ - ZPs - \frac{sq}{2} \left( \frac{\cotg PZ}{\sin ZPs} - \frac{\cotg Ps}{\tg ZPs} \right) \\ &= 180^\circ - ZPK - \frac{sq}{2} \left( \frac{\cotg PZ}{\sin ZPK} - \frac{\cotg Ps}{\tg ZPK} \right) \end{aligned}$$

Also muß man zu der halben Zwischenzeit der Beobachtungen addiren den Winkel

$$\frac{sq}{2} \left( \frac{\cotg PZ}{\sin ZPK} - \frac{\cotg PS}{\tg ZPK} \right) \text{ in Zeit}$$

verwandelt, um die Zeit zu bekommen, welche die Sonne gebrauchte, um von  $k$  in den nördlichen Theil des Meridians zu kommen. Für zunehmende \*) Abweichung ist daher die-

so

\*) Unter zunehmender Abweichung wird hier Annäherung zu dem Nordpol verstanden.

se Verbesserung der Mitternacht positiv, für abnehmende negativ, und bekommt die der gleichzeitigen (oder zu derselben Länge der Sonne gehörigen) Mittagsverbesserung entgegengesetzte Zeichen (§. 111.). Die beyden Glieder des Coefficienten von  $\frac{sq}{2}$  sind die-

selben, welche bey der Mittagsverbesserung (§. 111.) für die Stundenwinkel  $ZPK, ZPS$  vorkommen. Nur ist  $\frac{1}{2} sq$  nicht die zu dem Stundenwinkel  $ZPK$ , sondern die zu dem Winkel  $RPK$  gehörige Veränderung der Abweichung der Sonne. Diese wird in demselben Verhältniß größer seyn als die bey der Berechnung der Mittagsverbesserung für dieselbe Länge der Sonne angenommene Veränderung der Abweichung, in welchem die Zwischenzeit der zur Bestimmung der Mitternacht genommenen Höhen größer ist als ihre Ergänzung zu 24 Stunden, oder in welchem der Winkel  $RPK$  größer ist als  $ZPK$ . Hat man also Tafeln für die Mittagsverbesserung, so findet man daraus die Verbesserung der Mitternacht auf folgende Art.

Man ziehe die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen von 12 Stunden ab, suche mit dieser gefundenen Zeit und mit der Länge der Sonne für die zwischen den Beobachtungen liegende Mitternacht die Mittagsverbesserung, ändere an beyden Theilen der Mittagsverbesserung die Zeichen, und vergrößere sie in dem Verhältniß der halben Zwischenzeit der Beobachtungen zu ihrer Ergänzung zu 12 Stunden

den, so hat man die Verbesserung der Mitternacht.

Auf diese Art kann man die Mitternachtsverbesserung für *stumpfe* Stundenwinkel *von Mitternacht an gerechnet* finden, aber nicht die Mittagsverbesserung für Zwischenzeiten, die größer sind als 12 Stunden, weil alsdann der Winkel *ZPK* stumpf wird, und die Grös-

se  $\frac{\cotg Ps}{\tan g ZPK}$  das entgegengesetzte Zeichen bekommt \*).

*Beyspiel.* Den 27. März 1792 nahm ich in *Alzburg* bey *Calw* im Wirtembergischen folgende correspondirende Höhen der Sonne mit dem Sextanten:

Vormittag.	gedopp. Höhe d. obern ☉ R	Nachmittag.	Hieraus Zeit der Uhr im wahren Mittag nach §. 112. 23 <sup>U.</sup> 56' 14",07
12 <sup>U.</sup> 3' 15",0	63° 0'	2 <sup>U.</sup> 49' 49",0	
4 30,0	— 20	— 48 33,5	
5 44,0	— 40	— 47 18,0	
7 1,0	64 0	— 46 4,0	
8 17,0	— 20	— 44 48,0	
9 33,5	— 40	— 43 31,0	
10 50,0	65 0	— 42 15,0	

An dem darauf folgenden Tage wollte ich wieder correspondirende Höhen nehmen, um die wahre Zeit des Eintritts des Aldebarans am dunkeln Mondrande, welchen ich d. 27. März um 9<sup>U.</sup> 16' 34",7 Zeit der Uhr beobachtete, zu bestimmen. Allein wegen ungünstiger Witterung bekam ich nur des Vormittags folgende Höhen:

März

\*) Kästners astr. Abh. I. Samml. S. 274. u. f

$$\begin{array}{rcl}
 \text{März 27.} & 21^{\text{U.}} 2' 46'',5 & | 63^{\circ} 40' \\
 & - 4 & 0,5 & | 64 & 0 \\
 & - 5 & 17,0 & - & 20 \\
 & - 6 & 34,7 & - & 40
 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{März 28 nach} \\ \text{bürgerlicher Zeit} \end{array}$$

Aus diesen 4 Höhen verbunden mit den correspondirenden nachmittäglichen vom 27 März fand ich die unverbesserte Mitternacht

$$\begin{array}{r}
 \frac{1}{2}(21^{\text{U.}} 2' 46'',5 + 2^{\text{U.}} 47' 18'' 0) = 11^{\text{U.}} 55' 2'',25 \\
 \phantom{=} 11 \quad 55 \quad 2,25 \\
 \phantom{=} 11 \quad 55 \quad 2,50 \\
 \phantom{=} 11 \quad 55 \quad 2,85 \\
 \hline
 \text{Mittel} \quad 11 \quad 55 \quad 2,46
 \end{array}$$

Die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen (für das Mittel) ist  $9^{\text{St.}} 9'$  folglich  $ZPS = 12^{\text{St.}} - (9^{\text{St.}} + 9') = 2^{\text{St.}} 51'$  und in Graden  $= 42^{\circ} 45'$ . Die Abweichung der Sonne d. 27. März um Mitternacht ist  $= 3^{\circ} 10'$  nördlich. Zunahme der Abweichung der Sonne in 24 St.  $= 23' 24''$  folglich in  $9^{\text{St.}} 9' = 535,27 \text{ Sec.} = \frac{1}{2} sq$ ; die Breite  $= 48^{\circ} 43' 26''$  also  $PZ = 41^{\circ} 16' 34''$ .

$$\begin{array}{r}
 \text{Lg cotg } PZ = 0,0566128 \\
 \text{C. Lg sin } ZPS = 0,1682577 \\
 \text{Lg } \frac{1}{2} sq = 2,7285729 \\
 \hline
 2,9534434 \\
 \text{gehört zu } 898'',345 \\
 \\
 \text{Lg cotg } PS = 8,7429222 - 10 \\
 \text{Lg Cotg } ZPS = 0,0341445 \\
 \text{Lg } \frac{1}{2} sq = 2,7285729 \\
 \hline
 1,5056396 \\
 \text{gehört zu } 32'',036
 \end{array}$$

N 4

daher

daher  $SPs = 898'',345 - 32'',036 = 866'',309$ ,  
 und in Zeit  $= \frac{866,309}{15} = 57'',754$  also die  
 Zeit der Uhr um Mitternacht  $11^u. 55' 2'',46 +$   
 $57'',75 = 11^u. 56' 0'',21$

§. 124.

Wenn man auf diese Art zwey Culminationen der Sonne oder eines Sterns bestimmt hat, so kann man finden, ob die Uhr nach wahrer oder nach mittlerer Sonnenzeit oder nach Sternzeit gehet. Nehme ich das im vorhergehenden §. gegebene Beyspiel, so zeigte die Uhr, als die Sonne d. 27. März culminirte

$23^u. 56' 14'',07$

und  $11^u. 56' 0'',21$  als die Sonne unter dem Horizont durch den Mittagskreis gieng, beyder Zeiten Unterschied ist  $11^{st}. 56' 0'',21 - 23^{st}. 56' 14'',07 = 11^{st}. 59' 46'',14$  \*).

Die Uhr gieng also für wahre Zeit zu langsam, weil 12 wahre Sonnenstunden so groß als  $11^{st}. 59' 46'',14$  der Uhr sind, oder ihre Stunden waren länger als wahre Sonnenstunden.

Will man die Uhr mit *mittlerer* Zeit vergleichen, so verwandelt man die aus correspondirenden Höhen gefundenen w. Zeiten der Durchgänge durch den Mittagskreis in mittlere Zeit. Für den Berliner Meridian ist die Zeitgleichung d. 27. März im Mittage  $+5' 15'',3$ , d. 28  $= +4' 56'',7$ , also ihre Abnahme in 24 Stunden  $= 18'',6$ . Altbürg liegt von Berlin

\*) Kann dieses abziehen, wie hier, nicht geschehen, so werden 24<sup>st.</sup> addirt.



lin 18' 40" in Zeit gegen Abend, also war es in Berlin 0<sup>U</sup>. 18' 40" wahrer Zeit, als es an ersterem Ort Mittag war. Die Veränderung der Zeitgleichung in dieser Zeit von 18' 40" beträgt  $\frac{18' 40''}{24.60}$ . 18",6 oder 0",2. Daher ist

die Zeitgleichung d. 27. März im Mittage für den Beobachtungsort = 5' 15",1 und aus demselben Grunde die Zeitgleichung um Mitternacht + 5' 5",8. Die Uhr sollte also, wenn sie nach mittlerer Zeit gestellt gewesen wäre, im wahren Mittag gezeigt haben

$$0^U. 5' 15'',10$$

sie zeigte aber 23 56 14,07,

$$\text{Unterschied} = 9 \quad 1,03$$

folglich gieng die Uhr für mittlere Zeit zu spät um 9' 1",03.

Ferner ist die mittlere Zeit d. 27. März um Mitternacht

$$12^U. 5' 5,8''0$$

$$\text{Zeit d. Uhr} \quad \underline{11 \quad 56 \quad 0,21}$$

$$\text{Unterschied} = 9 \quad 5,59$$

also gieng die Uhr d. 27. März um Mitternacht für mittlere Zeit zu spät um 9' 5",59 und blieb gegen mittlere Zeit in 12 Stunden zurück um  $9' 5",59 - 9' 1",03 = 4",56$ .

Da man nun die Zeit der Uhr d. 27. März im Mittag und um Mitternacht kennt, so kann man die wahre Zeit des Eintritts des Aldebarans (§. 123.), welche zwischen beyde Zeitpuncte fiel, angeben. Zieht man die Zeit der Uhr im wahren Mittag d. 27 März von 24 Stunden ab, so findet man  $24^{\text{St}} - (23^{\text{St}} 56'$

N 5

14",07)



wahre Zeit der Beobachtung des Eintritts  $\alpha$  8.  
 Bequemer kann  $T'$  gefunden werden, wenn  
 man den Unterschied zwischen  $T'$  und  $T$  sucht.  
 Da sich verhält

$N : N' = T : T'$ , so hat man auch

$$N' - N : N = T' - T : T$$

$$\text{also } T' - T = \frac{N' - N}{N} \cdot T$$

$$\text{und man findet } T' = T + \frac{N' - N}{N} \cdot T$$

Geht die Uhr zu geschwind, so ist  $N' < N$ ,  
 und man hat

$$T' = T - \frac{N - N'}{N} \cdot T$$

Für obiges Beyspiel ist.  $N' - N = 13'',86$

$$T = 9^{\text{st}} 20' 20'',63$$

$$N = 11 59 46,14$$

$$\text{Lg } 13'',86 = 1,1417632$$

$$\text{Lg } T = 4,5266058$$

$$\text{C. Lg } N = 0,3646556 - 5$$

$$\hline 1,0330246$$

gehört zu  $10'',79$

Also ist

$$T' = 9^{\text{st}} 20' 20'',63 + 10'',79 = 9^{\text{st}} 20' 31'',42$$

Auf dieselbe Art findet man auch die mittlere  
 Zeit der Beobachtung.

$$\begin{array}{rcl} \text{mittlere Z. im Mittag} & 0^{\text{u}} 5' 15'',10 & \\ \text{— — um Mittern.} & 12 5 5,80 & \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} \text{mittlere Z. im Mittag} & 0^{\text{u}} 5' 15'',10 & \\ \text{— — um Mittern.} & 12 5 5,80 & \end{array}} \right\} 27. \text{ März}$$

$$\text{Zwischenzeit} = 11 59 50,70 = N'$$

$$\text{Zeit der Uhr im Mitt. } 23 56 14,07$$

$$\text{— — — um Mittern. } 11 56 0,21$$

$$\hline 11 59 46,14 = N$$

$$N' - N = 4,56$$

Zeit

$$\begin{array}{r}
 \text{Zeit der Uhr im Mittag } 23^{\text{u}} 56' 14,07 \\
 \text{mittlere Zeit } 0 \quad 5' 15,10 \\
 \hline
 \text{Zeit der Beob. } 9^{\text{st}} 16' 34,70 \\
 \hline
 9 \quad 25' 35,73 = T \\
 T' = 9^{\text{st}} 25' 35'',73 + \frac{4'',56 (9^{\text{st}} 25' 35'',73)}{11^{\text{st}} 59' 46'',14} \\
 = 9^{\text{st}} 25' 39'',3 \\
 \text{welches die mittlere Zeit der Beobachtung ist.}
 \end{array}$$

## §. 125.

Die Uhren, welche nach Sternzeit gehen, werden so gestellt, daß sie 0 Uhr zeigen, wenn der Anfangspunct der Ecliptic oder 0 Gr.  $\gamma$  culminirt. Da nun die gerade Aufsteigung der Sterne von Abend gegen Morgen gerechnet wird, so wird ein Stern desto später culminiren, je größer seine gerade Aufsteigung ist. Ist diese z. B.  $= 90^\circ$ , so wird die Uhr 6<sup>u</sup> zeigen müssen, wenn der Stern culminirt, weil  $360^\circ : 24$  Stunden geben. Um also eine Uhr mit Sternzeit zu vergleichen, beobachte man die Zeit der Culmination eines Sterns (§. 110. u. f.), berechne seine gerade Aufsteigung für den Tag der Beobachtung und verwandle sie in Zeit ( $15^\circ$  auf eine Stunde gerechnet). Diese Zeit hätte die Uhr zeigen müssen, wenn sie genau nach Sternzeit gestellt wäre. Vergleicht man also die Zeit der Uhr in dem Augenblick der Culmination des Stern mit der geraden Aufsteigung desselben in Zeit verwandelt, so findet sich die Abweichung der Uhr von der Sternzeit. Da die gerade Aufsteigung der

der Sterne sich wegen der *Präcession*, *Nutation* und *Aberration*, auch wegen ihrer *eigenen Bewegung*, ändert, so muß man bey der Berechnung derselben diese Dinge in Rechnung bringen. Man kann also auch nicht sagen, daß eine Uhr *gleichförmig* gehe, wenn man findet, daß sie 24 Stunden von einer Culmination eines Sterns bis zu seiner nächstfolgenden zeigte. In so kurzer Zeit ist zwar die Veränderung der geraden Aufsteigung eines Sterns geringe, wenn man aber aus zwey mehrere Tage von einander entfernten Culminationen auf den Gang der Uhr schliesen wollte, so würde man schon merkliche Fehler begehen.

Einige andere Methoden, die Zeit zu bestimmen, welche die Polhöhe als beynahe oder als genau bekannt voraussetzen, werden unten vorkommen. Was die Bestimmung der Zeit aus Durchgängen der Sterne betrifft, so findet man dazu die vollständigste Anleitung und sehr bequem eingerichtete Tafeln zu Abkürzung und Erleichterung der Rechnung in des Herrn *von Zach tabulis motuum Solis*.

### §. 126.

Die Zeit der Culmination eines Fixsterns, dessen gerade Aufsteigung man kennt, wird sich nun leicht angeben lassen, wenn die Uhr berichtigt ist. Hat man eine Uhr die nach Sternzeit geht, so wird sie in dem Augenblick der Culmination die gerade Aufsteigung des Sterns in Zeit angeben, oder eben so viel mehr oder weniger zeigen müssen, als sie der Sternzeit voreilt oder nachgeht. Ist die Uhr  
nach

nach mittlerer Sonnenzeit gestellt und durch correspondirende Sonnenhöhen berichtigt, so kennt man den Augenblick des Durchgangs der Sonne durch den Meridian. In diesem Augenblick seye die gerade Aufsteigung eines Sterns  $= A$ , die gerade Aufsteigung der Sonne  $= a$  und  $A$  größer als  $a$ , so wird dieser Stern in dem Augenblick der Culmination der Sonne noch um den Stundenwinkel  $A - a$  *gegen Morgen* von dem Mittagskreis abstehen, und es werden noch so viele Stunden, Min. und Secunden Sternzeit bis zu dem Augenblick der Culmination des Sterns verfließen, als der Bogen  $A - a$  in Zeit verwandelt beträgt (15 Grade auf eine Stunde gerechnet). Nun kommt aber ein Fixstern nach einer Uhr, die nach mittlerer Zeit gehet, täglich um  $3' 55'' ,908$  früher in den Meridian, folglich muß man von dem in Zeit verwandelten Bogen  $A - a$  noch die in dieser Zeit geschehene Acceleration der Fixsterne abziehen, um die mittlere Zeit der Culmination des Sterns zu erhalten. Ist die gerade Aufsteigung der Sonne größer als die gerade Aufsteigung des Sterns, so wird der Stern von der Sonne in dem Augenblick ihrer Culmination um einen Stundenwinkel  $= a - A$  *gegen Abend* abstehen, und um den Stundenwinkel  $360^\circ - a + A$  *gegen Morgen*. Man findet also immer den Stundenwinkel, um welchen ein Stern von der Sonne in dem Augenblick ihrer Culmination *gegen Morgen* absteht, wenn man von der geraden Aufsteigung des Sterns die gerade Aufsteigung der Sonne im Mittage abzieht, und in dem Fall, wenn  
des

des Sterns gerade Aufsteigung kleiner wäre, als die der Sonne, zuerst  $360^\circ$  dazu addirt. Ferner erhellet aus dem bisher gesagten, daß der Unterschied zwischen der geraden Aufsteigung des Sterns, und der geraden Aufsteigung der Sonne *in dem Augenblick der Culmination des Sterns* so in Zeit verwandelt, daß  $15^\circ$  auf eine Stunde gehen, die *wahre* Zeit gebe, welche von der Culmination der Sonne bis zu der Culmination des Sterns verfließt.

*Beyspiel.* In *Altburg* zeigte die Uhr d. 24. Dec. 1791 im Mittag  $0^h 3' 2''$ ; d. 25. Dec.  $0^h 3' 49''$ , 0. Die mittlere Zeit im wahren Mittag war d. 24. Dec.  $0^h 0' 5''$ , 6; d. 25. Dec.  $0^h 0' 35''$ , 7, und also die Abweichung der Uhr von mittlerer Zeit d. 24. Dec.  $+ 2' 56''$ , 4; d. 25. Dec.  $+ 3' 13''$ , 3. Man sucht die Zeit der Uhr in dem Augenblick des Durchgangs des *Polarsterns* durch den Meridian d. 24. Dec.

Die gerade Aufsteigung des Polarsterns ist für diese Zeit  $= 12^\circ 38' 20''$ . Die gerade Aufsteigung der Sonne d. 24. im Mittag (aus astron. Jahrbuch für 1791 mit Meridiandifferenz  $18' 40''$  westlich von von Berlin)  $272^\circ 56' 54''$ . Hier muß man also zu der geraden Aufsteigung des Sterns 360 Grade addiren, und von dieser Summe die gerade Aufsteigung der Sonne abziehen, so findet sich der Stundenwinkel des Polarsterns d. 24. Dec. im Mittag  $= 99^\circ 41' 26''$  gegen Morgen, und in Zeit

$$\begin{array}{r}
 = 6^{\text{st}} 38' 45'',7 \\
 - \text{Accel. in } 6^{\text{st}} 38 = - \quad \quad 5,3 \\
 \hline
 6 \quad 37' 40,4
 \end{array}$$

d. 24. Dec. mittlere Zeit im Mittag  $\begin{array}{r} 0 \quad 0 \quad 5,6 \\ \hline \end{array}$   
 mittlere Zeit der Culm. des Polarst.  $\begin{array}{r} 6 \quad 37 \quad 46,0 \\ \hline \end{array}$

Die Abweichung der Uhr von der mittlern Zeit im Mittage d. 24. Dec. war  $+2' 56'',4$  und ihre Voreilung in 24 Stunden  $= 3' 13'',3 - 2' 56'',4 = 16'',9$ , also ihre Abweichung von der mittlern Zeit d. 24. Dec. Abends um  $6^{\text{u}} 37' = +2' 56,4 + 4'',6 = +3' 1'',0$ . Folglich culminirte der Polarstern *über dem Pol*, als die Uhr zeigte  $6^{\text{u}} 37' 46'',0 + 3' 1'',0 = 6^{\text{u}} 40' 47''$ .

Da ein Sterntag  $= 24^{\text{st}} - (3' 55'',908)^* = 23^{\text{st}} 56' 4'',092$  mittlerer Zeit, so findet man die Zeit der Culmination eines Sterns *unter dem Pol* wenn man zu der *über dem Pol*  $11^{\text{st}} 58' 2'',046$  addirt. Hier muß noch die Voreilung der Uhr in Rechnung gebracht werden.  
 Culm. über dem Pol  $6^{\text{u}} 40' 47'',0$  Zeit der Uhr.

$$\begin{array}{r}
 11 \quad 58 \quad 2,0 \\
 \hline
 18 \quad 38 \quad 49,0 \\
 \text{Voreilung der Uhr in} \quad + 8,4 \\
 11^{\text{st}} \quad 58'
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{Culm. unter d. Pol} \quad 18 \quad 38 \quad 57,4 \\
 \text{od. d. 25. Dec. Morg.} \quad 8 \quad 38 \quad 57,4
 \end{array}$$

### §. 127.

Anstatt die gerade Aufsteigung der Sonne abzuziehen, kann man auch ihre Ergänzung zu 360 Gr. addiren. So findet sich nach dem  
 Bey-

\*) De Zach tabulae motuum Solis. Tab.



Beyspiel des vorhergehenden §.

$$360^{\circ} - 272^{\circ} 56' 54'' = 87^{\circ} 3' 6''$$

$$\text{gerade Aufst. des Polarst.} = \underline{12 \ 38 \ 20}$$

$$\text{Stundenwinkel} = \underline{99 \ 41 \ 26}$$

Diese Ergänzung findet sich in den astronomischen Jahrbüchern in Zeit verwandelt ( $15^{\circ}$  auf eine Stunde) für den Augenblick des Mittags unter der Aufschrift: Oestlicher Abstand  $0^{\circ} \gamma$  von der Sonne. Wird hiezu die gerade Aufsteigung des Sterns in Zeit addirt, und die Acceleration der Fixsterne in Rechnung gebracht, so hat man die wahre Zeit der Culmination des Sterns.

$$\begin{array}{r} \text{d. 25. Dec. Abst. } 0^{\circ} \gamma \text{ von der Sonne} = 5^{\text{St.}} 48' 16'' \\ \text{gerade Aufst. Polarst. in Zeit} = \underline{0 \ 50 \ 33,3} \\ \hline 6 \ 38 \ 49,3 \end{array}$$

(Bode Jahrbuch für 1791.)

Nun war der Abstand  $0^{\circ} \gamma$  d. 25. Dec. kleiner um  $4' 27''$ , folglich d. 24. Dec.  $6^{\text{U.}} 38'$  kleiner um  $1' 13'',9$ . Diese Acceleration von  $6^{\text{U.}} 38' 49'',3$  abgezogen gibt die wahre Zeit der Culm. d. Polarst.  $6^{\text{U.}} 37' 35'',4$  für den Berliner Meridian, weil der Abstand  $0^{\circ} \gamma$  für den Berliner Meridian berechnet ist. Wird dieser auf den Meridian von Altburg reducirt, (indem man

$$\begin{array}{r} \underline{(4' 27'')(18' 40'')} \\ 1440 \end{array} \text{ davon abzieht, weil Altburg}$$

$18' 40''$  von Berlin gegen Abend liegt), so findet sich

$$\begin{array}{rcl}
\text{Abst. } 0^\circ \gamma \text{ von der Sonne} & = & 5^{\text{st}} 48' 16'',0 \\
\text{für Berlin} & & \\
\text{reduct. merid.} & = & \text{— } 3,5 \\
\hline
\text{Abst. } 0^\circ \gamma \text{ für d. Altbg. Mer.} & = & 5 \quad 48 \quad 12,5 \\
\text{gerade Aufst. Polarst.} & = & 0 \quad 50 \quad 33,3 \\
\hline
& & 6 \quad 38 \quad 45,8 \\
\text{Accel. —} & & \text{— } 1 \quad 13,9 \\
\hline
\text{wahre Zeit der Culm. d. Polarst.} & & 6 \quad 37 \quad 31,9 \\
\text{Altbg. Merid.} & & \\
\text{Zeitgleichung} & + & 0 \quad 0 \quad 13,9 \\
\hline
\text{Culm. d. Polarst. nach m. Z.} & & 6 \quad 37 \quad 45,8 \\
& & (\S. 126.)
\end{array}$$

### §. 128.

Wenn man durch correspondirende Höhen die Zeit der Culmination eines Sterns bestimmt hat, so kann man die Uhr mit mittlerer Zeit so vergleichen. Man berechnet die mittlere Zeit der Culmination des Sterns nach §. 126. oder §. 127., diese Zeit mit der aus correspondirenden Höhen gefundenen Zeit des Durchgang des Sterns durch den Mittagskreis verglichen gibt der Uhr Abweichung von der mittlern Zeit.

Auf diese Art erhält man die Zeit des Durchgangs eines Sterns durch den Meridian mit einer Genauigkeit, die zur Bestimmung der Breite hinreichend ist. Will man aber die Uhr vermittelst der Fixsterne genau berichtigen, so muß man bey der Berechnung der geraden Aufsteigung des Sterns seine *Nutation* und

und *Aberration* \*) nach der geraden Aufstei-  
gung in Rechnung bringen. Es seye die Län-  
ge der aufsteigenden Mondsknoten =  $N$ , die  
gerade Aufsteigung des Sterns =  $A$ , die Schie-  
fe der Ecliptic =  $\omega$ , die Länge der Sonne =  $\odot$ ,  
des Sterns Abweichung =  $\delta$ , so ist die Nutation  
in der geraden Aufsteigung

$$= -9''55 \cos N \cos A \tan \delta - 7''05 \sin N \sin A \tan \delta - 7''05 \cot \omega \sin N. **).$$

Weil  $\cos N \cos A = \frac{1}{2} \cos(N+A) + \frac{1}{2} (\cos N - \cos A)$   
und  $\sin N \sin A = \frac{1}{2} \cos(N-A) - \frac{1}{2} \cos(N+A)$   
so läßt sich die Nutation in der geraden Auf-  
steigung auch so ausdrücken:

$$-8''3 \cos(N-A) \tan \delta - 1''25 \cos(N+A) \tan \delta - 7''05 \cot \omega \sin N$$

Die *Aberration* in der geraden Aufsteigung ist

$$= - \frac{20'' (\cos \frac{1}{2} \omega)^2 \cos(A - \odot)}{\cos \delta} + \frac{20'' (\sin \frac{1}{2} \omega)^2 \cos(A + \odot)}{\cos \delta}$$

Setzt man die Schiefe der Ecliptic =  $23^\circ 28'$ ,  
so wird die Nutation in der geraden Aufstei-  
gung =

$$-8''3 \cos(N-A) \tan \delta - 1''25 \cos(N+A) \tan \delta - 16''25 \sin N$$

die *Aberration* in der geraden Aufsteigung

$$= - \frac{19''17 \cos(A - \odot)}{\cos \delta} + \frac{0''83 \cos(A + \odot)}{\cos \delta}.$$

Eine

\*) Ueber die tägliche *Aberration* sehe man einen Auf-  
satz von H. M. Camerer in dem ersten Supplem.  
Band zu Bode's astron. Jahrbüchern S. 198.

\*\*) *Connaissance des temps pour l'année 1789* p. 143.  
wenn man nach Maskelyne  $2a = 19''1$  und  $2b = 14''1$  setzt.

Eine Veränderung der Schiefe der Ecliptic um eine Minute verändert den Factor des letzten Glieds der Formel für die Nutation nur um 0,003 Secunden, die beyden Factoren in der Formel für die Aberration um 0",002 und 0",001.

Die Veränderung der geraden Aufsteigung eines Sterns wegen der Nutation ist also in Zeit  

$$= 0",553 \cos(N-A) \tan \delta - 0",083 \cos(N+A) \tan \delta - 1",083 \sin N$$

Die Aberration in Zeit ist

$$= \frac{1",272 \cos(A-\odot)}{\cos \delta} + \frac{0",055 \cos(A+\odot)}{\cos \delta}.$$

Wenn man die *beobachtete* gerade Aufsteigung eines Sterns in die *mittlere* verwandeln will, muß man in diesen Formeln die entgegengesetzten Zeichen gebrauchen.

#### §. 129.

Um den Gebrauch dieser Formeln zu zeigen, wende ich sie auf das in dem 126. §. gegebene Beyspiel an. Die Länge der Sonne und des Knotens sollten eigentlich für den Augenblick berechnet werden, für welchen man die Aberration und Nutation sucht. Allein die Nutat. und Aberration verändert sich in einem Tage so wenig, daß man die Länge der Sonne und des Knotens für den nächsten Mittag aus den Ephemeriden nehmen darf.

Die gerade Aufsteigung des Polarsterns  
 $= 22^{\circ} 38' 20'' = A$  (§. 127.) Abweichung  
 $= 88 \quad 11 \quad 49 = \delta$

Die Länge der Sonne  
 $= 192^{\circ} 20' 40''$  oder  $= 272^{\circ} 40' = \odot$

Die Länge des Knotens  
 $= VI \quad 8 \quad 22 \quad = 188 \quad 12 = N$

Also

Also  $N + A = 175^\circ 44'$ ;  $N - A = 201^\circ 0'$ ;  
 $A - \odot = 99^\circ 58'$  \*);  $A + \odot = 285^\circ 18'$ . Hier  
 werden  $\cos(N - A)$ ,  $\cos(N + A)$ ,  $\sin N$ ,  
 $\cos(A - \odot)$  negativ, also bekommen die For-  
 meln für die Nutation und Aberration durch-  
 aus das Zeichen  $+$ .

$$\begin{aligned} \text{Lg } 0'',553 &= 0,7427251 - 1 \\ \text{Lg } \cos(N - A) &= 9,9987947 - 10 \\ \text{Lg } \tan \delta &= 1,5019702 \\ &\hline &1,2434900 \end{aligned}$$

gehört zu  $17'',51$

$$\begin{aligned} \text{Lg } 1'',083 &= 0,0346285 \\ \text{Lg } \sin N &= 9,1628853 - 10 \\ &\hline &0,1975138 - 1 \\ &\text{gehört zu } 0'',16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Lg } 0'',083 &= 0,9190781 - 2 \\ \text{Lg } \cos(N + A) &= 9,9701517 - 10 \\ \text{Lg } \tan \delta &= 1,5019702 \\ &\hline &0,3912000 \\ &+ 2'',46 \\ &+ 17,51 \\ &+ 0,16 \\ &\hline \text{Nutat.} &= + 20,13 \text{ in Zeit.} \end{aligned}$$

Lg

\*) Weil hier  $A$  kleiner ist als  $\odot$ , so werden zu  $A$   $360^\circ$   
 addirt, um abziehen zu können.

$$\begin{aligned}
& \text{Lg } 1'',272 = 0,1644871 \\
& \text{Lg } \cos(A - \odot) = 9,2382349 - 10 \\
& \text{C. Lg } \cos D = 1,5021853 \\
& \quad \quad \quad \underline{0,8449073} \\
& \quad \quad \quad + 7'',00 \\
& \text{Lg } 0'',055 = 0,7427251 - 2 \\
& \text{Lg } \cos(A + \odot) = 9,4213950 - 10 \\
& \text{C. Lg } \cos D = 1,5021853 \\
& \quad \quad \quad \underline{0,6663054 - 1} \\
& \quad \quad \quad + 0'',46 \\
& \quad \quad \quad \underline{7,00} \\
& \text{Aberration} = + 7,46 \text{ in Zeit.} \\
& \text{Nutation} = + 20,13 \\
& \quad \quad \quad \underline{\text{Summe} = 27,59} \\
& \text{Culm. Polarst. um } 6^{\text{U}} 40' 47,00 \text{ Zeit der Uhr. (§. 126)} \\
& \text{Verbess. Zeit d. Culm } \underline{6 \ 41 \ 14,59}
\end{aligned}$$

### *Filar - Gnomon.*

#### §. 130.

Wenn man durch ein kleines rundes Loch die Sonnenstrahlen in ein verfinstertes Zimmer fallen läßt, so entsteht auf dem Boden oder der gegenüberstehenden Wand ein Bild der Sonne. Hat man nun auf dem Boden eine Mittagslinie gezogen, so wird man die Zeiten beobachten können, da der vorhergehende und der nachfolgende Sonnenrand die Mittagslinie berührten, das Mittél aus beyden gibt die Zeit der Culmination der Sonne. Eine solche Vorrichtung nennt man einen *Gnomon*, wovon es verschiedene Einrichtungen gibt. Die bequemste scheint mir diejenige zu seyn, welche

welche H. Prof. *Kratzenstein* in den Berliner Ephemeriden für 1782 S. 133 beschrieben hat. Man befestigt nemlich ein Messingblech ungefähr mit der Weltaxe parallel an der Mauer eines gegen Mittag liegenden Zimmers oberhalb eines Fensters. Diese Platte hat ein Loch von einer Linie im Durchmesser, an dessen oberem Theile eine feine Kerbe ist, die den Silberfaden \*) durchläßt, der oberhalb derselben auf der Platte befestigt ist. Der Faden geht in das Zimmer nach der gegenüberstehenden Mauer fort, wo eine messingene Klammer befestigt ist, die eine messingene Schraube mit einigen fein eingedrehten Kerben führt, und beynahe auf der Mittagslinie senkrecht steht. Ueber eine von diesen Kerben wird der Silberdrat gehängt, und mit einem Gewicht gespannt. Von diesem Faden hängt ein darüber hin und her beweglicher feiner mit einem kleinen Gewicht beschwerter Faden herab. Dem Gewicht gibt man ein großes Volumen und hängt es in ein Glas mit Wasser, damit es bald zur Ruhe kömmt.

Ist nun der ausgespannte Faden in der Mittagslinie, so bestimmt dieser mit dem herabhängenden Loth die Mittagsfläche. Will man also die Culmination der Sonne beobachten, so stellt man hinter das Loth ein weiß angestrichenes oder mit weißem Papier überzogenes Brett, so kann man das Vorübergehen des Sonnenbildes vor dem Verticalfaden beobachten. Wenn der Faden etwas von dem  
Brett

\*) Ich gebrauchte eine feine messingene Saite.

Brett absteht, so kann man die Zeiten beobachten, da der Schatten des Verticalfadens, der in dem Sonnenbild sehr scharf erscheint, die Ränder der Sonne berührt.

Die Lage der Mittagslinie muß man vorher beynahe kennen. In dieser Absicht darf man nur einen Faden mit einem Gewicht an dem Fenster aufhängen, und die Lage seines Schattens beobachten, wenn die Sonne culminirt, welches man leicht wissen kann, wenn man die Uhr berichtigt hat. Ist nun der Gnomon aufgerichtet, so nimmt man correspondirende Höhen, und beobachtet auch die Zeit der Culmination der Sonne an dem Gnomon, so findet man aus dem Unterschied der aus correspondirenden Sonnenhöhen und aus der Beobachtung an dem Gnomon gefundenen Zeiten der Culmination der Sonne den Fehler des Gnomons, den man leicht vermittelst der Schraube, über welche der Silberfaden herabhängt, verbessern kann.

### §. 131.

Die Berichtigung des Gnomons zu erleichtern und abzukürzen, bediente ich mich folgender Methode. Ich zählte die Anzahl der Schraubengänge, welche auf einen Zoll gingen, und fand  $25\frac{1}{2}$ . Diese mit der Länge des ausgespannten Drats von 12,75 Fuß verglichen dienten zur Bestimmung der Anzahl von Schraubengängen, welche erfordert wurden, um jenen Drat um einen gegebenen Winkel zu verrücken. Da der Drat horizontal ausgespannt ist, so ist der Winkel, welchen er mit der

Mit-



Mittagslinie macht, wenn der Gnomon noch fehlerhaft gefunden wird, das Azimuth der Ebene des Gnomons. Dieses kann man finden, wenn man weiß, um wie viel früher oder später die Sonne durch die Ebene des Gnomons gieng, als durch die Mittagsebene. Denn in dem sphärischen Dreyek  $PZS$  Fig. 46, wo  $Z$  das Zenith,  $P$  der Pol,  $S$  der Ort der Sonne, und  $ZS$  ein Vertialkreis durch sie ist, verhält sich.

$$\sin PS : \sin PZS = \sin ZS : \sin ZPS$$

$$\text{oder } \cos \delta : \sin a = \cos h : \sin t$$

Weil man hier  $a$  und  $t$  als klein annehmen darf, so kann man statt ihren Sinus die Bogen selbst und  $h$  der Mittagshöhe der Sonne gleich sezen, welche  $AH = qs = 90^\circ - \varphi + \delta$  ist, folglich hat man

$$a = \frac{\cos \delta}{\sin(\varphi - \delta)} \cdot t$$

*Beyspiel.* Den 27. März 1792 war der erste Rand der Sonne an dem Verticalfaden

um  $23^u.54' 26'',5$

der 2te um  $23 \quad 56 \quad 35,0$

Summe  $47 \quad 51 \quad 1,5$

Hälfte  $23 \quad 55 \quad 30,75$  Mittelpunkt d.  $\odot$  am Gnomon.

Mittag um  $23 \quad 56 \quad 14,07$  (§. 123.)

Fehl. d. Gnomons =  $43,32$  in Zeit.

$t = 649'',8$  im Bogen.

$\varphi = 48^\circ 43'$

$\delta = 2 \quad 58$

$\varphi - \delta = 45 \quad 45$

$$\text{Lgt} = 2,8127797$$

$$\text{Lg} \cos \delta = 9,9994176$$

$$\text{C. Lg} \sin(\phi - \delta) = 0,1449039$$

$$\text{Lg} a = 2,9571012$$

$$a = 995'',9 = 15' 5'',9$$

Da die Sonne früher durch die Ebene des Gnomons als durch die Mittagsebene gieng, so machte erstere mit dieser einen Winkel von  $15' 5'',9$  gegen Morgen, folglich mußte der an der Schraube befindliche Endpunct des ausgespannten Drats weiter gegen Morgen gerückt werden, welches durch die Umdrehung der Schraube geschehen konnte. Wie viele Umdrehungen der Schraube erfordert wurden, um den Drat in die Mittagslinie zu bringen, ließe sich so berechnen. Auf einen Zoll giengen  $25\frac{1}{2}$  Schraubenrevolutionen, folglich war

$$\text{eine Revolution} = \frac{1}{25,5} = \frac{2}{51} \text{ Zollen. Diese}$$

Größe mit der Länge des Drats  $= 12,75 \text{ F.} = 153 \text{ Zollen}$  dividirt gibt die Tangente des Winkes, welcher einer Schraubenrevolution zugehört, oder den Winkel selbst in Theilen des Halbmessers, weil die Winkel klein sind. Folglich ist dieser Winkel

$$= \frac{2.206265}{51.153} \text{ Secunden.}$$

$$= 52,868 \text{ Sec.}$$

und die Anzahl von Schraubenrevolutionen, welche zu dem Winkel  $a''$  gehört

$$= \frac{a}{52,868} = \frac{905,9}{52,868} = 17,135$$

Die

Die Höhe des Lochs, durch welches die Sonnenstrahlen einfielen, über dem Boden war 10 Fuß, und ich konnte vermittelst dieses Gnomons die Uhr bis auf eine Secunde berichtigen, welches zu Messung der Mittagshöhen hinreichende Genauigkeit gibt. Dieser Gnomon diene nun auch zur Berichtigung der Zenithfernrohre §. 130. und §. 131.

---

*Bestimmung der Polhöhe, oder der geographischen Breite eines Orts.*

§. 132.

Es ist schon oben §. 3. und 4. im allgemeinen gezeigt worden, wie man aus der Mittagshöhe eines Fixsterns oder der Sonne die Breite findet. Da man aus dem Vorhergehenden auch die zu diesen Beobachtungen erforderlichen Instrumente kennet, so werde ich jetzt die Sache ausführlicher behandeln können.

Nach §. 110. u. f. kann man die Zeit berechnen, da die Sonne oder ein Stern durch den Mittagskreis geht; mißt man in diesem Augenblick seine Höhe, so bekommt man die Mittagshöhe. Es fragt sich, *wie genau* man die Zeit des Durchgangs durch den Mittagskreis wissen müsse, damit keine merkliche Fehler in der Messung der Mittagshöhe entstehen, und wie die Veränderungen der Mittagshöhen können berechnet werden, wenn man sie kurz vor oder nach der Culmination genommen hat, um daraus die wahren Mittagshöhen herzuleiten.

*Höhen-*

## Höhenänderung nahe an dem Mittagkreis.

### §. 133.

In der Gleichung (§. 111.)  $\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$ , kann man statt  $\cos t$  setzen  $1 - 2(\sin \frac{1}{2}t)^2$ ; so wird

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta - 2(\sin \frac{1}{2}t)^2 \cos \varphi \cos \delta \\ = \cos(\varphi - \delta) - 2(\sin \frac{1}{2}t)^2 \cos \varphi \cos \delta$$

Hat man nun einen Stern von nördlicher Abweichung in dem *südlichen* Theil des Meridians genommen, so ist nach §. 4. die Aequatorshöhe oder  $90^\circ - \varphi$  (§. 3.) = der Mittagshöhe ( $H$ ) - Abweichung  $\delta$ ; also  $H = 90^\circ - \varphi + \delta = 90^\circ - (\varphi - \delta)$ , und  $\cos(\varphi - \delta) = \sin H$ , folglich

$$\sin H - \sin h = 2(\sin \frac{1}{2}t)^2 \cos \varphi \cos \delta$$

Für einen Stern von südlicher Abweichung ist  $\sin \delta$  negativ, also

$$\sin h = \cos \varphi \cos \delta \cos t - \sin \varphi \sin \delta \\ = \cos(\varphi + \delta) - 2(\sin \frac{1}{2}t)^2 \cos \varphi \cos \delta,$$

folglich ebenfalls

$$\sin H - \sin h = 2(\sin \frac{1}{2}t)^2 \cos \varphi \cos \delta, \text{ weil hier } H = 90^\circ - \varphi - \delta \text{ (§. 4.)}$$

$$\text{aber } \sin H - \sin h = 2 \cos \left( \frac{H+h}{2} \right) \sin \left( \frac{H-h}{2} \right)$$

$$\text{setzt man } H-h = \Delta h, \text{ so wird } \frac{H+h}{2} = H - \frac{1}{2}\Delta h$$

folglich

$$2 \cos \left( H - \frac{1}{2}\Delta h \right) \sin \frac{1}{2}\Delta h = 2(\sin \frac{1}{2}t)^2 \cos \varphi \cos \delta$$

und

$$\text{und } \sin \frac{1}{2} \Delta h = \frac{(\sin \frac{1}{2} t)^2 \cos \varphi \cos \delta}{\cos (H - \frac{1}{2} \Delta h)}$$

$$= \frac{(\sin \frac{1}{2} t)^2 \cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi \mp \delta \pm \frac{1}{2} \Delta h)} \quad \left. \begin{array}{l} \text{— für nördl.} \\ \text{+ für südl.} \end{array} \right\} \text{Abweich.}$$

Vermittelst dieser Formel kann man die Höhenänderung  $\Delta h$  so genau als man will berechnen. Man setzt nemlich zuerst den Nenner  $= \sin (\varphi \mp \delta)$  und berechnet so den  $\sin \frac{1}{2} \Delta h$ . Dieser Werth von  $\frac{1}{2} \Delta h$  in den Nenner gesetzt gibt den  $\sin \frac{1}{2} \Delta h$  schon näher, und man kann diese Näherung so weit treiben, bis man zwey aufeinander folgende gleiche Werthe von  $\Delta h$  bekommt.

Ist aber der Stundenwinkel  $t$  klein, und  $\varphi - \delta$  nicht kleiner als  $20^\circ$ , so kann man in dem Nenner  $\frac{1}{2} \Delta h$  weglassen, und statt  $\sin \frac{1}{2} \Delta h$ ,  $\sin \frac{1}{2} t$  die Bogen selbst gebrauchen, alsdann

$$\text{wird } \frac{1}{2} \Delta h = \frac{\frac{1}{4} t^2 \cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi \mp \delta)}$$

Die Höhe seye  $n$  Minuten vor oder nach der Culmination genommen, so ist  $t = 900 \cdot n$ , (weil  $1'' = 15''$  im Bogen) und in Theilen des Halbmessers 1 (§. 85.)  $= 900 \cdot n$ , also

$$\Delta h = \frac{2 \cdot (450 \cdot e)^2 \cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi \mp \delta)} \cdot n^2,$$

folglich in Secunden

$$\Delta h = \frac{2 \cdot (450)^2 \cos \varphi \cos \delta \cdot e}{\sin (\varphi \mp \delta)} \cdot n^2 =$$

$$\frac{1,96345 \cos \varphi \cos \delta}{\sin (\varphi \mp \delta)} \cdot n^2 \quad *)$$

Setzt

\*) Wenn man diese Näherungsformel genauer berechnet, so findet sich  $\Delta h$

Setzt man  $n=1$ , so bekommt man die Höhenänderung für ein Zeitminute vor oder nach Mittag, diese mit dem Quadrat der Zeit vor oder nach der Culmination in Minuten ausgedrückt multiplicirt gibt die Höhenänderung für jeden andern Stundenwinkel mit hinlänglicher Genauigkeit, wenn  $n$  nicht gröfser ist als 10. Der beständige Logarithme von 1,96345. ist.  $= 0,2930199$ .

*Beyspiel.* Man hat d. 19. Apr. 1794 unter einer Breite von  $51^{\circ}32'$  die Höhe der Sonne  $3^{\circ}45''$  nach Mittag beobachtet, wie viel war diese Höhe von der Mittagshöhe der Sonne verschieden?

Hier  $\varphi = 51^{\circ}32' \dots \text{Lg cos} = 9,7938317 - 10$

$\delta = 11 \quad 20 \dots \text{Lg cos} = 9,9914477 - 10$

$\varphi - \delta = 40 \quad 12 \quad \text{C. Lg sin} = 0,1901322$

$\text{Lg const.} = 0,2930199$

0,2684316

gehört zu  $1'',855 =$  Höhenänderung in einer Minute.

Diese

$$\Delta h = \frac{1,96345. \cos \varphi \cos \delta}{\sin(\varphi + \delta)} n^2 -$$

$$\frac{0,0000093 \cos \varphi \cos \delta}{\sin(\varphi + \delta)} \left( \frac{1}{3} + \cos \varphi \cos \delta \cotg(\varphi - \delta) \right) n^4.$$

Hieraus findet sich leicht, daß der Fehler obiger Formel für  $n=10$  unter einer Breite von  $51^{\circ}32'$  im Sommersolstitio, wo er am grösten wird, nur 0,16 Sec. und unter einer Breite von  $40^{\circ}$  unter denselben Umständen 0,62 in der Berechnung der Veränderung der Mittagshöhe der Sonne beträgt. Die Breite  $\varphi$  und Abweichung  $\delta$  dürfen nur bis auf einige Minuten bekannt seyn.

Diese Höhenänderung mit  $(3' 45'')^2 = (3,75)^2 = 14,06$  multiplicirt giebt  $26'',08$ , um welches die  $3' 45''$  nach der Culmination der Sonne beobachtete Höhe kleiner war als die Mittagshöhe.

### §. 134.

Für einen Stern, der in dem nördlichen Theil des Meridians culminirt, dessen Abweichung also größer ist als die Breite (§. 4.) wird  $\varphi - \delta$  negativ, der Cosinus eines negativen Bogens aber bleibt positiv, folglich ist auch in diesem Fall

$$\sin h = \cos(\delta - \varphi) - 2(\sin \frac{1}{2}t)^2 \cos \varphi \cos \delta$$

$$\text{also } \Delta h = \frac{1,96345 \cos \varphi \cos \delta}{\sin(\delta - \varphi)} \cdot n^2.$$

Ist aber der Stundenwinkel  $t$  stumpf, so ist (wen  $T$  = Stundenwinkel von Mitternacht angerechnet),

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin \varphi \sin \delta - \cos \varphi \cos \delta \cos T \\ &= \sin \varphi \sin \delta - \cos \varphi \cos \delta + 2(\sin \frac{1}{2}T)^2 \cos \varphi \cos \delta \\ &= -\cos(\varphi + \delta) + 2(\sin \frac{1}{2}T)^2 \cos \varphi \cos \delta. \end{aligned}$$

Eines Sterns Mittagshöhe *unter* dem Pol ist  $= \varphi - (90^\circ - \delta) = \varphi + \delta - 90^\circ$  (§. 4.), also  $\varphi + \delta > 90^\circ$ , wenn man seine Höhe *unter* dem Pol noch beobachten kann, und  $\sin(\varphi + \delta - 90^\circ) = -\cos(\varphi + \delta)$ , folglich, wenn  $H$  wieder die Mittagshöhe heißt,

$\sin h = \sin H + 2(\sin \frac{1}{2}T)^2 \cos \varphi \cos \delta$  und die *Zunahme* der Höhe in  $n$  Minuten vor oder nach der Culmination des Sterns

$$= \frac{1,96345 \cos \varphi \cos \delta \cdot n^2}{\cos(\varphi + \delta - 90^\circ)} = \frac{1,96345 \cos \varphi \cos \delta}{\sin(180^\circ - (\varphi + \delta))} \cdot n^2$$

Wenn

Wenn man die Höhenänderung eines Fixsterns berechnen will, muß  $n$  in *Sternzeit* gegeben seyn.

Die Formeln für die Höhenänderung in  $n$  Minuten vor oder nach der Culmination der Sonne oder eines Sterns sind also folgende:

*I. In dem südlichen Theil des Meridians.*

$$\Delta h = \frac{1,96345 \cos \varphi \cos \delta}{\sin(\varphi \mp \delta)} \cdot n^2 \quad \left. \begin{array}{l} - \text{für nördl.} \\ + \text{für südl.} \end{array} \right\} \text{Abweichung}$$

*II. In dem nordlichen Theil des Meridians.*

$$\begin{aligned} \Delta h &= \frac{1,96345 \cos \varphi \cos \delta}{\sin(\delta - \varphi)} \cdot n^2 \\ &\quad \text{für Höhen über dem Pol.} \\ &= \frac{1,96345 \cos \varphi \cos \delta}{\sin(180^\circ - (\varphi + \delta))} \cdot n^2 \\ &\quad \text{für Höhen unter dem Pol.} \end{aligned}$$

§. 135.

Wenn ein Quadrant in der Mittagsfläche steht und man eines Sterns Höhe vor oder nach der Culmination, so weit es das Sehfeld der Fernröhre verstattet, nimmt, so ist diese Höhe von seiner Mittagshöhe aus zweyerley Ursachen verschieden. Einmal weil seine Höhe kleiner war als die Mittagshöhe, fürs zweyte weil die nach dem Stern gezogene Absehlenslinie nicht mehr mit des Quadranten Ebene parallel ist. Es fragt sich nun, wie dieser Fehler berechnet werden könne?

Man sieht leicht, daß es hier auf den scheinbaren Weg ankömmt, welchen der Stern durch



durch das Sehfeld der Fernröhre nimmt. Wäre dieser Weg eine gerade mit dem Horizont parallele Linie, so würde man in jeder Stelle des Sehfelds auf dieser Linie die Mittagshöhe des Sterns bekommen. Ist er aber eine krumme Linie, so wird man des Sterns Höhe zu groß oder zu klein bekommen, je nachdem diese ihre hohle Seite gegen das Zenith oder gegen den Horizont kehrt.

Wenn man sich nach einem Stern hin eine gerade Linie gezogen gedenkt, so beschreibt diese während des täglichen Umlaufs des Sterns die Oberfläche eines geraden Kegels (wenn man die Strahlenbrechung, Veränderung der Declination u. s. w. nicht in Betrachtung zieht). Ein Stück eines ähnlichen Kegels beschreibt der Hauptstral in der Fernröhre, welches durch eine in dem Brennpunct liegende und auf der in der Mittagsfläche befindlichen Seitenlinie des Kegels senkrecht stehende Ebene geschnitten wird, in welcher das Fadenkreuz ist. Der scheinbare Weg des Sterns ist also ein Kegelschnitt, und kann den verschiedenen Abweichungen der Sterne nach eine Ellipse, Parabel, Hyperbel oder eine gerade Linie werden.

### §. 136.

*ACB* Fig. 50 Taf. VI seye ein Schnitt dieses Kegels durch die Mittagsebene, *CD* seine Axe, welche die Weltaxe seyn wird, *B* die Stelle des Fadenkreuzes, und also *CB* des Objectivs Brennweite, *BA* ein Durchschnitt der erweiterten Ebene des Fadenkreuzes mit  
P der

der Mittagsebene auf  $CB$  senkrecht, so wird ein Stern bey seinem Durchgang durch die Mittagsfläche den horizontalen Faden in dem Brennpunct der Fernröhre berühren.  $DCA = DCB$  ist des Sterns Abstand vom Pol. So lange also  $ACB$  kleiner ist als ein rechter Winkel, so ist der scheinbare Weg des Sterns eine *Ellipse*, deren große Axe  $= AB$ . Wird  $ACB$  ein rechter Winkel, so wird  $AB$  mit  $AC$  parallel, und der Schnitt ist eine *Parabel*. Für  $ACB > 90^\circ$  entsteht eine *Hyperbel* bis zu  $180^\circ$  da die Kegelfläche in eine Ebene übergeht, und der scheinbare Weg des Sterns eine *gerade Linie* wird. Eben so entstehen dieselben Schnitte bey südlichen Abweichungen oder Polardistanzen  $> 90^\circ$ . Für 45 Grad südliche Abweichung oder für 135 Grad Abstand von dem Nordpol entsteht wieder eine *Parabel*. Man hat also für die Abstände von dem Nordpol

von $0^\circ$ bis $45^\circ$	Ellipse.	
	$45^\circ$	Parabel.
von 45 bis 90	Hyperbel.	
	90	gerade Linie.
von 90 bis 135	Hyperbel.	} den erstern entgegenges.
	135	Parabel.

### §. 137.

Wenn die Gestalt des Kegels, der Abstand  $CB$  der schneidenden Ebene von der Spitze des Kegels und der Winkel  $ABC$  gegeben sind, so kann man leicht den Parameter und die große Axe des Kegelschnitts nach bekannten Regeln finden. Für gegenwärtigen Fall ist

$CB$

$CB$  des Objectivs Brennweite  $\Rightarrow l$ ,  $ACD = DCB$  des Sterns Abstand vom Pol  $= D$  und  $ABC$  ein rechter Winkel. Daraus findet sich die groſſe Axe  $AB$

$$= l \operatorname{tang.} 2D$$

$$\text{der Parameter der groſſen Axe} = \frac{l \sin 2D}{\cos D^2}$$

Nun ſeyen  $ab, de$ , Fig. 51 die beyden Kreuzfäden,  $ab$  der Mittagsfaden oder der verticale Faden, ſo iſt  $ca$  ein Theil der groſſen Axe des Kegelschnitts, und man hat, wenn  $cp = x$ ,  $pm = y$ , die groſſe Axe  $= 2a$  und ihr parameter  $= p$  geſetzt wird

$$y^2 = px \mp \frac{p}{2a} \cdot x^2$$

Wird dieſe quadratiſche Gleichung aufgelöſt, ſo findet man für ein gegebenes  $pm$  das zugehörige  $cp$ , oder  $qm$  aus  $pm$ , das heiſt den Abstand von dem horizontalen Faden für einen gegebenen Abstand von dem Mittagsfaden, und alſo die Verbeſſerung der Höhe. Oben hatten wir

$$2a = l \operatorname{tang} 2D$$

$$p = \frac{l \sin 2D}{\cos D^2}$$

alſo  $\frac{p}{2a} = \frac{\cos 2D}{\cos D^2}$ , und die Gleichung für den Kegelschnitt

$$y^2 = \frac{l \sin 2D}{\cos D^2} \cdot x - \frac{\cos 2D}{\cos D^2} \cdot x^2 \text{ oder wenn}$$

man  $y$  und  $x$  in Theilen der Brennweite des Objectivs ausdrückt

$$\frac{y^2}{l^2} = \frac{\sin 2D}{\cos D^2} \cdot \frac{x}{l} - \frac{\cos 2D}{\cos D^2} \cdot \frac{x^2}{l^2}$$

$$\text{also } \frac{x}{l} = \tan 2D \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\cos 2D}{\sin D^2} \cdot y^2}\right) = qm.$$

für  $D = 45^\circ$  wird  $\tan 2D = \infty$ , und  $\cos 2D = 0$ ,  
allein in diesem Fall ist der Schnitt eine Para-

bel (§. 136.), deren Parameter  $= \frac{l \sin 2D}{\cos D^2} = 2l$

$$\text{also } y^2 = 2lx$$

$$\text{und } \frac{x}{l} = \frac{1}{2} \frac{y^2}{l^2}.$$

Wenn die Abstände vom Pol groß sind, so wird folgende Formel bequemer seyn, welche man findet, wenn die Größe unter dem Wurzelzeichen in eine Reihe aufgelöst wird.

$$\frac{x}{l} = \frac{1}{4} \frac{\sin 2D}{\sin D^2} \frac{y^2}{l^2} + \frac{1}{32} \frac{\sin 4D}{\sin D^4} \frac{y^4}{l^4}.$$

Wird nun  $\frac{x}{l}$  mit 206265 multiplicirt, so be-

kommt man  $qm$  Fig. 51 in Theilen eines größten Kreises. Um diese Verbesserung gehörig anbringen zu können, bemerke ich, daß eine Höhe, die man mit einem in der Mittagsebene aufgestellten Quadranten außer dem Meridianfaden nimmt, größer ist als die Mittagshöhe, wenn die Polardistanz *kleiner* ist als  $90^\circ$ , und die Höhe gegen *Süden* genommen ist, oder gegen *Norden* unter dem Pol; aber kleiner für *südliche* Abweichung oder Polardistanz größer als  $90^\circ$ , und für Höhen unter dem Pol.

## §. 138.

Die Tangente des Winkels, welchen die nach dem Stern gezogene Linie mit der Quadranten Ebene macht, ist  $\frac{y}{l}$ . Nennt man diesen Winkel  $\lambda$ , so ist

$$\begin{aligned} \frac{x}{l} &= \frac{1}{4} \frac{\sin 2D}{\sin D^2} (\text{tang } \lambda)^2 \\ &+ \frac{1}{32} \frac{\sin 4D}{\sin D^4} (\text{tang } \lambda)^4, \text{ und in Secunden} \\ &= \frac{206265}{4} \sin 2D \left( \frac{\text{tang } \lambda}{\sin D} \right)^2 \\ &+ \frac{206265}{32} \sin 4D \left( \frac{\text{tang } \lambda}{\sin D} \right)^4. \end{aligned}$$

Das zweyte Glied kann man weglassen, ohne einen Fehler von 0,1 Sec. zu begehen, wenn  $\lambda$  kleiner ist als  $\frac{1}{10}D$ .

*Beyspiel.* Man hat die Höhe des obern Sonnenrandes bey  $23^\circ 27'$  nordlicher Abweichung mit einem in der Mittagsfläche stehenden Quadranten beobachtet, als der eine Sonnenrand den Mittagsfaden berührte, um wie viel war diese Höhe von der Mittagshöhe verschieden?

$$D = 66^\circ 33' 0''$$

$$\text{Halbmess. } \odot = \lambda = 0 \quad 15 \quad 47$$

$$2D = 133 \quad 6 \quad 0$$

$$C. \text{Lg} \sin = 0,0374376$$

$$\text{Lg} \tan g = \underline{\underline{7,6619279 - 10}}$$

$$\text{Lg} \left( \frac{\tan g \lambda}{\sin D} \right) = 7,6993655 - 10$$

$$\text{Lg} \left( \frac{\tan g \lambda}{\sin D} \right)^2 = 15,3987310 - 20$$

$$\text{Lg} \sin 2D = 9,8634194 - 10$$

$$\text{Lg} \frac{1}{2} = 5,3144251 = \text{Lg} 206265$$

(§. 85.)

$$\underline{\underline{0,5765755}}$$

gehört zu 3,772

Unterschied von der Mittagshöhe

$$= \frac{3,772}{4} = 0,943 \text{ Sec.}$$

Da nun nach §. 137. die beobachtete Höhe in diesem Fall größer ist als die Mittagshöhe, so müssen 0,9 Sec. von der beobachteten Höhe abgezogen werden, um die Mittagshöhe zu erhalten.

Ist die Abweichung der Sonne  $= 23^\circ 27'$  südlich, so wird  $D = 113^\circ 27'$ ,  $2D = 226^\circ 54'$ , also  $\sin 2D$  wieder ebenso groß als bey nordlicher Abweichung, aber negativ.  $\left( \frac{\tan g \lambda}{\sin D} \right)^2$

bleibt beständig positiv, folglich bekommt bey südlicher Abweichung die Verbesserung der Mittagshöhe das entgegengesetzte Zeichen, und sie muß also zu beobachteten Höhen addirt werden, wie man schon aus §. 137. weiß. Für alle in dem südlichen Theil des Meridians genommene Höhen wäre also die Verbesserung

$$\text{rungen} = -51566 \sin 2D \left( \frac{\tan \lambda}{\sin D} \right)^2$$

Weil  $\lambda$  klein ist, so könnte man den Bogen statt der Tangente gebrauchen. Allein man muß doch diesen Bogen in Theilen des Halbmessers ausdrücken; daher ist es bequemer aus den trigonometrischen Tafeln den Logarithmen der Tangente zu nehmen, zumal da man  $\lambda$  nicht genauer als bis auf Minuten zu wissen nöthig hat.

*Bestimmung der Breite vermittelt der Circumpolar-Sterne.*

§. 139.

Wenn man die Mittagshöhe eines Sterns *über* und *unter* dem Pol mißt, so kann man daraus nach §. 3. S. 3. die Breite finden. Weil kleine Höhen wegen der Strahlenbrechung unsicher sind, so wählt man dazu solche Sterne deren Abstand vom Pol geringe und deren kleinste Höhe folglich nicht viel von der größten unterschieden. Der *Polarstern* ( $\alpha$  ursae minoris) ist unter den kenntlichen Sternen der nächste am Pol, und also zur Bestimmung der Breite am vortheilhaftesten zu gebrauchen. Da er am Ende des Decembers Abends um 6 Uhr *über* dem Pol, und also 12 Sternstunden nachher *unter* demselben durch den Mittagkreis geht, so kann man ihn um diese Zeit Abends *über* und Morgens *unter* dem Pol in dem Meridian beobachten.

Um



Um den Quadranten in den Mittagskreis zu bringen, darf man nur nach §. 126. die Zeit der Culmination eines Sterns berechnen, und den Quadranten in dem Augenblick der Culmination des Sterns so stellen, daß der Stern an dem Verticalfaden des Fadenkreuzes steht. Man wird dieses leicht zu Stande bringen, wenn man einige Secunden vor der Culmination des Sterns den Verticalfaden auf ihn richtet, und durch sanfte Bewegung des Quadranten in dem Azimuth ihn daran zu erhalten sucht, bis die Uhr die Zeit der Culmination angibt, und hierauf den Quadranten fest schraubt. Ein kleiner Fehler in der Stellung des Quadranten in die Mittagsebene hat auf die Messung der Mittagshöhen keinen merklichen Einfluß, wie §. 133. und 134. gezeigt wurde.

*Beyspiel.* Den 24. Dec. 1791 beobachtete ich in *Alzburg* mit einem nach obiger Beschreibung eingerichteten Quadranten, den ich in die Mittagsfläche gestellt hatte, die Höhe des Polarsterns *über* dem Pol  $= 50^{\circ} 55' 30''$ . Die 96 Theilung gab 54 Gr. 1 Viertel und 4 Theile des Vernier. Die Uhr zeigte als der Stern durch den Verticalfaden gieng  $6^h 40' 36''$

Den 25. Dec. Morgens um 6 Uhr oder den 24. Decemb.  $18^h 40' 6''$  gieng der Stern *unter* dem Pol durch den Verticalfaden, und ich fand die Mittagshöhe *unter* dem Pol  $= 47^{\circ} 20' 0''$  nach der gewöhnlichen und  $= 50 \text{ } 1 \text{ } 15$  nach 96 Theilung.

Beob.



Beob Höhe über dem Pol = 50° 55' 30", 0  
 Col. Fehler (§. 41.) — 23 30, 0

nach der 66. Theil. = 50 31 49, 7

Mittel = 50 31 54, 8

Taf. III. Strahlenbrechung — 0 47, 0

wahre Höhe = 50 31 7, 8

Beob. Höhe unter dem Pol = 47° 20' 0", 0

— 23 30, 0

46 56 30, 0

nach der 66. Th. = 46 56 29, 8

Mittel = 46 56 29, 9

Strahlenbrech. — 53, 3

wahre Höhe unter d. Pol = 46 55 36, 6

— über — = 50 31 7, 8

Summe = 97 26 44, 4

Hälfte = 48 43 22, 2 Breite (§. 3.)

nach der 54 = 50° 37' 30", 00 } Taf. I.  
 66. Th. 1 = 0 14 3, 75 }  
 4 = 0 3 30, 94 }

Coll. Fehler — 23 15, 00

(§. 41.)

50 31 49, 69

nach der 50 = 46 52' 30", 00 } Taf. I. A  
 66. Th. 2 = 0 14 3, 75 }  
 15 = 0 13 11, 01 }

47 19 44, 76

— 23 15, 00

46 56 29, 76

## §. 140.

Wenn man die Zeit weiß, da ein Stern so wohl über als unter dem Pol in dieselbe Verticalfläche kam, und den Gang der Uhr kennt, nach welcher die Beobachtungen gemacht wurden, so kann man finden, was diese Verticalfläche vor einen Winkel mit der Mittagsfläche macht. Ist die Verticalfläche in der Mittagsfläche, so muß die Zwischenzeit zwischen dem Durchgang durch die Verticalebene über dem Pol und dem Durchgang unter dem Pol genau so groß seyn, als ein halber Sterntag (in Zeit der Uhr ausgedrückt, wenn die Uhr nicht nach Sternzeit geht). Hat man einen Stern zweymal nach einander auf derselben Seite des Pols, und einmal auf der entgegengesetzten in der Verticalebene beobachtet, so geben die ersteren Beobachtungen den Gang der Uhr oder den Sterntag in Zeit der Uhr ausgedrückt, eine der erstern mit der letzten verglichen, zeigt, ob der Verticalkreis den Parallelkreis des Sterns halbirt, oder in der Mittagsebene liegt.

Es seye  $ZPR$  Fig. 48 Taf. VI der nordliche Quadrant des Meridians,  $Z$  das Zenith,  $P$  der Pol,  $STQ$  ein Parallelkreis eines Sterns, der zweymal in demselben Verticalkreis  $ZTSW$  beobachtet wird, das eine mal in  $T$  das andere mal in  $S$ . Man fälle aus dem Pol  $P$  das Perpendikel  $PW$  auf den Verticalkreis  $ZW$ , so sind die sphärischen rechtwinklichten Drey-ecke  $TPW$ ,  $SPW$  einander gleich. Der Winkel  $TPS$  und also auch die Hälfte desselben

ben  $TPW$  ist gegeben, weil sich die ganze tägliche Umlaufszeit des Sterns zu der Zeit von  $T$  bis  $S$  verhält sich wie 360 Gr. zu dem Winkel  $TPS$ .  $PS$  ist des Sterns Abstand vom Pol. Also hat man

$$1 : \cos WPT = \text{tang } PT : \text{tang } PW.$$

Nun kennt man in dem rechtwinklichten Dreyek  $ZPW$  die beyden Catheten  $PW$  und  $PZ = 90^\circ - PR =$  dem Complement der Breite, und es verhält sich

$$1 : \sin PZ = \cotang Pw : \cotg PZw \\ = \text{tang } PZW : \text{tang } PW$$

Hieraus findet sich also der Winkel  $PZW$  oder das Azimuth der Verticalfläche. Man sieht leicht, daß die Verticalebene, in welcher man den Stern beobachtet, auf derjenigen Seite des Pols liegt, auf welcher die Zeit von einem Durchgang bis zu dem nächstfolgenden kleiner ist als ein halber Sterntag.

Wenn der Winkel  $WPT$  beynahe 90 Gr. ist, so läßt sich die Formel zur Rechnung bequemer einrichten. Man nenne das Complement des Winkels  $WPT$   $\psi$ , so ist  $\psi =$  dem halben Unterschied zwischen einem halben Sterntag und der Zeit von einem obern oder untern Durchgang bis zu dem nächstfolgenden untern oder obern in Grade verwandelt. Ist nun  $\psi$  klein, so wird auch  $\text{tang } PW$  klein, also kann man setzen  $PW = \psi \text{ tang } PT = \psi \cotg \delta$ , und aus demselben Grunde

$$PZW = \frac{PW}{\sin PZ} = \frac{\psi \cotg \delta}{\cos \varphi} = \psi \cotg \delta \sec \varphi.$$

**Beyspiel.** Nach §. 139. war die Zeit von dem obern Durchgang des Polarsterns bis zu seinem untern  $= 18^{\text{St.}} 40' 6'' - 6^{\text{St.}} 40' 36'' = 11^{\text{St.}} 59' 30''$ . Ein Sterntag ist  $= 23^{\text{St.}} 56' 4'',09$  mittlerer Zeit. Die Uhr gieng aber täglich  $16'',9$  der mittlern Zeit vor (§. 126.), folglich ist ein Sterntag  $= 23^{\text{St.}} 56' 21''$  Zeit der Uhr. Die Hälfte davon ist  $11^{\text{St.}} 58' 10'',5$ . Folglich war die Zeit von dem obern Durchgang bis zu dem untern grösser als ein halber Sterntag um  $1' 19'',5$ . Die kleinere Zwischenzeit fiel also auf die östliche Seite des Pols, und der Quadrant wiche von Norden gegen Osten von der Mittagsfläche ab.

Nun geben  $\frac{1' 19'',5}{2}$  oder  $39'',75$  Zeit der Uhr

hier ohne merklichen Fehler  $39'',75$  mittlere Zeit, und in einer mittleren Sonnenstunde beschreibt ein Fixstern einen Bogen von  $15^{\circ} 2' 27'',847$  \*), folglich gehören zu  $39,75$  Sekunden m. Z.  $9' 57'',882$  im Bogen. Also

$$\begin{aligned} \psi &= 597'',882 & \text{Lg} &= 2,7766155 \\ \delta &= 88^{\circ} 12' & \text{Lg cotg} &= 8,4972928 - 10 \\ \varphi &= 48 \quad 43 & \text{C. Lg sin} &= 0,1240964 \end{aligned}$$

$$\text{Lg } PZW = 1,3980047$$

$$PZW = 25'',00 \quad \text{Azimuth des Quadranten.}$$

### §. 141.

Da man nun in dem sphärischen Dreyek den Winkel  $PZW$ , und die Seiten  $PZ, PT$  kennt,

\*) De Zach tabulae motuum Solis pag. CXXVII. Tab. XLV. und Samml. astron. Tafeln I. Band S. 294. Taf. XXXIII.

kennt, so kann man den Stundenwinkel  $ZPT$  finden. Man hat

$$\begin{aligned}\cotg m &= \tang PZW \cos PZ \quad *) \\ \cos n &= \cos m \tang PZ \cotg PT \\ \text{und hieraus } ZPT &= m + n \\ ZPS &= m - n\end{aligned}$$

Wenn  $PZW$  klein ist, so hat man

$$\begin{aligned}90^\circ - m &= PZW \cos PZ = PZW \sin \varphi \\ 90^\circ - n &= (90^\circ - m) \tang PZ \cotg PT = PZW \cos \varphi \tang \delta\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}ZPS &= 180^\circ - PZW \sin \varphi - PZW \cos \varphi \tang \delta \\ ZPT &= -PZW \cos PZ + PZW \sin PZ \cotg PT \\ &= -PZW \sin \varphi + PZW \cos \varphi \tang \delta.\end{aligned}$$

setzt man statt  $PZW$  seinen Werth  $\psi \cotg \delta \sec \varphi$  (§. 140.) so wird

$$\begin{aligned}ZPS &= 180^\circ - \psi \cotg \delta \tang \varphi - \psi = 180^\circ - RPS \\ \text{und } ZPT &= \psi - \psi \cotg \delta \tang \varphi\end{aligned}$$

Nimmt man statt  $\psi$  im Bogen die diesem Bogen zugehörige Zeit, so findet man  $RPS, ZPT$  in Zeit, und also den Unterschied zwischen dem Durchgang durch den Mittagskreis  $ZPR$  und den Scheitelkreis  $ZTSW$ , Fig. 48.

Oben hatten wir  $\psi$  in Zeit =  $39'',75$

$$\text{Lg } 39'',75 = 1,5993371$$

$$\text{Lg } \cotg \delta = 8,4972928 - 10$$

$$\text{Lg } \tg \varphi = 0,0565024$$

$$\hline 0,1531323$$

gehört zu  $1'',422$

$$\psi = 39,75 \text{ in Zeit.}$$

$$ZPT' = 38,33$$

$$RPS = 41,17$$

Der

\*) Kästners astron. Abhandl. I. Samml. S. 199. n. 152. S. 212. n. 179. lies  $\cos x = \tang s \cotg \delta \cos \lambda$ .

Der Quadrant wiche von Norden gegen Osten von der Mittagsfläche ab (§. 140.), und der Stern kam also über dem Pol früher an den Verticalfaden als in den Mittagskreis, folglich ist die Zeit der Culmination des Polarsterns  $6^h.40'36'' + 38'',3 = 6^h.41'14'',3$  welches nur  $0'',3$  von der oben §. 129. berechneten Zeit der Culmination abweicht, aber hier blos ein glücklicher Zufall ist, weil man mit einer Fernröhre, die nur 20 mal vergrößert, gewiß nicht genauer als bis auf 10 Secunden die Zeit des Austritts des Polarsterns an dem Meridianfaden beobachten kann. Gebraucht man Sterne von größern Abweichungen, so ist dieses das *bequemste und sicherste Mittel*, die Zeit vermittelst einer Mittagsfernrohre zu bestimmen, und sie in dem Mittagskreis gehörig aufzustellen.

Nach §. 134. Form. II. ist die Höhenänderung des Polarsterns in einer Minute vor oder nach der Culmination  $= 0,064$  Sec. über dem Pol  
 $= 0,059$  Sec. unter dem Pol.  
 folglich waren die Höhen des Polarsterns, welche 38 Sec. vor seinem *obern* und 41 Sec. nach seinem *untern* Durchgang durch den Mittagskreis genommen wurden von den Mittagshöhen nur einige Hunderttheile von Secunden verschieden.

#### §. 142.

Die hier beschriebene Methode, die Breite zu bestimmen, setzt die Abweichung des Sterns in der Zwischenzeit der Beobachtungen als *unverändert* voraus. Bekanntlich darf man dieses nicht mehr annehmen, wenn die Beob-

ach-

achtungen mehrere Tage von einander entfernt sind, weil die *Praecession* \*), *Aberration*, *Nutation*, und die *eigene Bewegung* der Fixsterne die Abweichung beständig verändern. Diese Veränderungen kann man mit hinlänglicher Schärfe berechnen, wenn man die Abweichungen und gerade Aufsteigungen nur beynahe kennt. So kann man berechnen, um wie viel die Abweichung des Sterns zur Zeit der ersten Beobachtung von seiner Abweichung zur Zeit der zweyten verschieden war, und also bestimmen, wie groß die zweyte Höhe würde gewesen seyn, wenn sich die Abweichung in der Zwischenzeit der Beobachtungen nicht geändert hätte. Diese auf die Zeit der ersten Beobachtung reducirte Höhe kann man nun, wie bisher gezeigt wurde, zur Bestimmung der Breite gebrauchen.

Hätte z. B. die Abweichung des Polarsterns in der Zwischenzeit der Beobachtungen (§. 139.) um 10 Secunden zugenommen, so würde man seine Höhe *unter* dem Pol  $= 46^{\circ} 55' 36'',6 + 10'' = 46^{\circ} 55' 46'',6$  gefunden haben. Da hätte man also von der beobachteten Höhe müssen abziehen  $10''$ , um sie auf die Zeit der ersten zu reduciren.

### §. 143.

Die von der *Praecession* und der eigenen Bewegung der Fixsterne herrührende jährliche Ver-

\*) Wegen der *Praecession* nähert sich gegenwärtig der Polarstern beständig dem Nordpol bis in die Mitte des Jahrs 2102, da er vom Pol nur noch  $27'$  absteht wird, Kästners astron. Abhandl. I. Samml. 336.



Veränderung ihrer Abweichung \*) findet man in den Verzeichnissen der Fixsterne, in welchen ihre gerade Aufsteigungen und Abweichungen für einen gewissen Zeitpunkt angegeben sind. Hieraus kann man leicht die Abweichung eines Fixsterns für eine gegebene Zeit finden. Die Nutation und Aberration in der Abweichung werden auf folgende Art be-

\*) In der *Connoissance des temps* 1792 stehen Tafeln zur Berechnung der von der Praecession herrührenden Veränderung der geraden Aufsteigung und Abweichung von H. de Lambre. Er nimmt das jährliche Vorruken der Nachtgleichen nach H. la Lande in diesem Jahrhundert zu  $50'',25$  an, S. 206. Dasselbst sagt er "Man würde etwas mehr finden, wenn nur die vereinigte Wirkung des Mondes und der Sonne auf das Sphäroid der Erde in Betrachtung gezogen würde. In der That macht nach den neuern Untersuchungen des Herrn de la Place die Wirkung der Planeten die Aequinoctialpunkte jährlich  $0'',2016$  in dem Aequator oder  $0'',1849$  in der Ecliptic vorwärts gehen; folglich muß die von dem Mond und der Sonne bewirkte Praecession  $50'',4349$  seyn, weil die ganze beobachtete Praecession  $50'',25$  ist. Ist nun die Schiefe der Ecliptic  $= \omega$  die gerade Aufsteigung des Sterns  $= A$ , seine Abweichung  $= \delta$ , Länge  $= L$ , Breite  $= \lambda$ ,  $dL = n. 50'',4349$ , wenn  $n$  die Anzahl von Jahren ist, für welche man die Praecession verlangt,  $dA, d\delta$  die Veränderung der zu  $dL$  gehörigen geraden Aufsteigung und Abweichung, so hat man nach aller Schärfe:

$$\sin \frac{1}{2} d\delta = \frac{\sin \frac{1}{2} dL \sin \omega \cos \lambda \cos (L + \frac{1}{2} dL)}{\cos (\delta + \frac{1}{2} d\delta)}$$

$$\sin (dA + n. 0'', 2016) = \frac{2 \sin \frac{1}{2} dL \cos \lambda^2}{\cos \delta \cos (\delta + d\delta)} \times$$

$$(\cos \omega \cos \frac{1}{2} dL - \sin \omega \tan \lambda (L + \frac{1}{2} dL));$$

und mit einer hinlänglichen Genauigkeit:

$$d\delta = n. 20'', 084 \cos (A + \frac{1}{2} dA)$$

$$dA = n. 46'', 0619 + n. 20'', 084 \sin (A + \frac{1}{2} dA) \tan (\delta + \frac{1}{2} d\delta)$$



berechnet. Es seye die gerade Aufsteigung eines Fixsterns  $= A$ , seine Abweichung  $\delta$ , die Länge der Sonne  $= \odot$ , die Länge des aufsteigenden Mondsknoten  $= N$ , so ist die Nutation in der ~~Abweichung~~

$$= \pm a \cos N \sin A \mp b \cos A \sin N^*)$$

Die oberen Zeichen gelten für nordliche, die unteren für südliche Abweichungen. Die Aberration in der ~~Abweichung~~ ist ~~K~~

$$= -20'' (\cos A \sin \odot - \cos \omega \sin A \cos \odot) \sin \delta - 20'' \sin \omega \cos \odot \cos \delta;$$

Folglich, wenn  $2a = 19'',1$ ;  $2b = 14'',1$  und  $\omega = 23^\circ 28'$  gesetzt wird (§. 128.)

Nutation in der Abweichung

$$= \pm 9'',55 \cos N \sin A \mp 7'',05 \cos A \sin N$$

Aberration in der Abweichung

$$= -20'' \cos A \sin \odot \sin \delta + 18'',346 \sin A \cos \odot \sin \delta - 7'',964 \cos \odot \cos \delta$$

Wenn man südliche Abweichungen als positiv betrachtet, so bekommt das letzte Glied das Zeichen  $+$ .

*Bestimmung der Breite und der Schiefe der Ecliptic vermittelt der größten und kleinsten Mittagshöhe der Sonne.*

#### §. 144.

Wenn man die Mittagshöhe der Sonne zur Zeit der *Sommersonnenwende* mißt, so ist dieselbe gleich dem Unterschied der Aequatorshöhe und der größten Abweichung der Sonne oder der Schiefe der Ecliptic. Zur Zeit der

\*) Connaissance des temps 1789.

der *Wintersonnenwende* findet man die Höhe der Sonne im Mittag gleich der Summe der Aequatorshöhe und Schiefe der Ecliptic. Folglich ist die halbe Summe der größten und kleinsten Mittagshöhe der Sonne der Aequatorshöhe gleich, welche von 90 Gr. abgezogen die Breite gibt. Statt der Mittagshöhen kann man auch Abstände vom Zenith gebrauchen. (§. 4.) Da ist der kleinste Abstand vom Zenith = dem Unterschied der Breite und der Schiefe der Ecliptic, der größte = der Summe von beyden, also die Breite = der halben Summe der kleinsten und größten Zenithdistanz der Sonne in dem Mittagskreis. Der halbe Unterschied von beyden ist die Schiefe der Ecliptic.

Ist die Schiefe der Ecliptic größer als die Breite, so fallen die größten und kleinsten Höhen oder die kleinsten und größten Abstände vom Zenith auf entgegengesetzte Seiten des Zeniths. In diesem Fall ist die halbe Summe von beyden der Schiefe der Ecliptic, der halbe Unterschied der Zenithdistanzen der Breite gleich, welche *nordlich* oder *südlich* ist, je nachdem die in dem nordlichen Theil des Meridians genommene Zenithdistanz die *kleinere* oder *größere* ist. S. die Tafel zu §. 4. S. 5. Weil man wegen der Unsicherheit der Strahlenbrechung nicht gerne kleine Höhen gebraucht, so ist diese Methode unter solchen Breiten, welche kleiner sind als  $34^{\circ} 8'$ , der Methode, die Breite vermittelst des Polarsterns zu bestimmen (§. 159.), vorzuziehen, weil alsdann die kleinste Höhe der Sonne größer

ser ist, als die Höhe des Polarsterns unter dem Pol.

### §. 145.

Um diese Methode gehörig anwenden zu können, muß man noch folgendes in Betrachtung ziehen. Das Solstitium tritt selten so nahe an dem Mittag ein, daß man die nächste Mittagshöhe der Sonne als die Solstitialhöhe ansehen könnte, und man kann noch überdies durch die Witterung gehindert werden, diese Höhe zu beobachten. Die Schiefe der Ecliptic verändert sich wegen ihrer Secular-Abnahme und wegen der Nutation, daher kann man in zwey auf einander folgenden Sonnenwenden sie nicht als gleich, und also auch das Mittel aus den beyden Solstitialhöhen nicht als die wahre Höhe des Aequators betrachten. Man nimmt daher zur Zeit der Sonnenwenden mehrere Mittagshöhen der Sonne, aus welchen man, wenn die Schiefe der Ecliptic nur bey nahe bekannt ist, die wahre Solstitialhöhe bestimmen kann. Durch diese Vervielfältigung der Beobachtungen bekommt man die Solstitialhöhe noch genauer, als wenn man unmittelbar sie selbst beobachtet hätte. Die Reduction wegen der Veränderung der Schiefe der Ecliptic wird auf ähnliche Art gemacht, wie §. 142. an dem Polarstern wegen der Veränderung seiner Abweichung gezeigt wurde.

### §. 146.

Aus der geraden Aufsteigung der Sonne ( $A$ ) und der Schiefe der Ecliptic ( $\omega$ ) findet  
 $Q$  2 man

man die Abweichung der Sonne ( $\delta$ ). Denn die gerade Aufsteigung der Sonne, die dazu gehörige Länge und Abweichung bilden ein rechtwinklichtes sphärisches Dreyek, in welchem der eine Cathetus die Abweichung der Sonne der andere ihre gerade Aufsteigung, und die Schiefe der Ecliptic der dem erstern entgegengesetzte Winkel ist. Folglich ist

$$\text{tang } \delta = \sin A \text{ tang } \omega$$

Differentiirt man diese Gleichung, indem man  $\delta$  und  $A$  als veränderlich betrachtet, so ist

$$\text{I. } \frac{d\delta}{(\cos \delta)^2} = dA \cos A \text{ tang } \omega$$

Ein Bogen des Aequators von einem Solstitialpunct an bis an den Ort der Sonne gerechnet seye  $x$ , so ist  $A = 90^\circ - x$  (oder  $270^\circ - x$ ), folglich

$$d\delta = -dx \sin x \text{ tang } \omega (\cos \delta)^2.$$

Da nun  $\text{tang } \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \sin A \text{ tang } \omega$ , so ist

$$1 - \frac{(\sin \delta)^2}{(\cos \delta)^2} = (\cos \delta \sin A \text{ tang } \omega)^2 =$$

$$\text{also } 1 = (\cos \delta)^2 (1 + (1 - \sin x^2) \text{ tang } \omega^2)$$

$$= (\cos \delta)^2 (1 + \text{tang } \omega^2 - (\sin x \text{ tang } \omega)^2)$$

$$\text{daher } (\cos \delta)^2 = \frac{(\cos \omega)^2}{1 - (\sin x \sin \omega)^2}.$$

Wird dieser Werth von  $\cos \delta$  in der Gleichung (I.) substituirt, so wird

$$d\delta = \frac{-dx \sin x \sin \omega \cos \omega}{1 - (\sin x \sin \omega)^2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} dx \sin x \sin 2\omega}{1 - (\sin x \sin \omega)^2}$$

Der

Der Nenner in eine Reihe aufgelöst und mit dem Zähler multiplicirt gibt

$$d\delta = -\frac{1}{2} \sin 2\omega dx \sin x -$$

$$\frac{1}{2} \sin 2\omega (\sin \omega)^2 (\sin x)^3 dx - \text{etc.}$$

für kleine Bogen ist sehr nahe  $\sin x = x - \frac{1}{6} x^3$   
also, wenn man die über 3 gehenden Potenzen von  $x$  wegläßt

$$d\delta = -\frac{1}{2} \sin 2\omega x dx + \frac{1}{2} \sin 2\omega \left(\frac{1}{6} - (\sin \omega)^2\right) x^3 dx$$

Wird nun integrirt, so erhält man

$$\delta = \text{const.} - \frac{1}{4} \sin 2\omega x^2 + \frac{1}{8} \sin 2\omega \left(\frac{1}{6} - (\sin \omega)^2\right) x^4$$

Da nun für  $x = 0$ ,  $\delta = \omega$  werden muß, so ist die zu  $x$  gehörige Abnahme der Abweichung, oder der Unterschied zwischen der Abweichung und der Schiefe der Ecliptic

$$\text{II. } \Delta\delta = \frac{1}{4} \sin 2\omega \cdot x^2 - \frac{1}{8} \sin 2\omega \left(\frac{1}{6} - (\sin \omega)^2\right) x^4 *).$$

### §. 147.

Um nun die Veränderung der Abweichung der Sonne in  $n$  Tagen vor oder nach der Sonnenwende berechnen zu können, muß man die Veränderung der geraden Aufsteigung der Sonne in einem Tage zur Zeit der Sonnenwenden wissen. Diese beträgt im Wintersolstitio  $1^\circ 6' 39''$  oder  $3999''$ , im Sommersolstitio  $3742$  Secunden. Im allgemeinen seye sie  $= \Delta A$ , so ist die Veränderung der Abweichung in  $n$  Tagen vor oder nach der Sonnenwende, wenn die Rechnung nach §. 85. oder §. 133. geführt wird;

$$= \frac{1}{4}$$

\*)  $\Delta\delta$  hängt zwar auch von der Veränderung der Schiefe der Ecliptic ab. Da aber diese in einem Jahr nur  $3''$  beträgt, so kann man sie in so kurzer Zwischenzeit  $= 0$  setzen.

$$= \frac{1}{2} \sin 2\omega \cdot e \Delta A^2 \cdot n^2 -$$

$$\frac{1}{2} \sin 2\omega \cdot e^3 \cdot \Delta A^4 \left( \frac{1}{2} - (\sin \omega)^2 \right) n^4 \text{ Secunden}$$
 Wird nun  $\omega = 23^\circ 28'$ ,  $\Delta A = 3742$  und  $= 3999$  gesetzt, so findet sich

für die Sommer-Sonnenwende

$$\Delta \delta = 12,3988 \cdot n^2 - 0,000016527 \cdot n^4 \text{ Secunden.}$$

für die Winter-Sonnenwende

$$\Delta \delta = 14,1603 \cdot n^2 - 0,000021557 \cdot n^4 \text{ Sec.}$$

Also ist bis auf 0,01 Secunden genau, wenn der Abstand von den Sonnenwenden nicht größer ist als fünf Tage

$$\Delta \delta = 12,3988 \cdot n^2 \text{ für die Sommersonnenwende.}$$

$$\Delta \delta = 14,1603 \cdot n^2 \text{ für die Wintersonnenwende.}$$

Eine Mittagshöhe der Sonne  $N$  Tage vor oder nach der Sommersonnenwende ist also  $= 90^\circ$

$$- \phi + \omega - 12,3988 \cdot N^2$$

und  $n$  Tage vor oder nach derselben

$$= 90^\circ - \phi + \omega - 12,3988 \cdot n^2$$

Beyder Höhen Unterschied ( $\Delta h$ ) kennt man aus den Beobachtungen, also ist

$$\Delta h = 12,3988 (N^2 - n^2) = 12,3988 (N+n)(N-n)$$

Die Zwischenzeit der Beobachtungen ist  $N-n$  oder  $N+n$ , je nachdem die Höhen auf *derselben* oder auf *entgegengesetzten* Seiten der Sonnenwende genommen sind. Folglich hat man in dem ersten Fall:

$$N+n = \frac{\Delta h}{12,3988 \cdot (N-n)} = 0,080653 \cdot \frac{\Delta h}{N-n}$$

in dem zweyten Fall:

$$N-n = \frac{\Delta h}{12,3988 \cdot N+n} = 0,080653 \cdot \frac{\Delta h}{N+n}$$

In der Wintersonnenwende gebraucht man statt der Zahl  $\frac{1}{12,3988}$  die Zahl  $\frac{1}{14,1603}$  oder 0,0706200.

Da man nun so wohl  $N+n$  als auch  $N-n$  kennt, so findet man  $N = \frac{N+n + N-n}{2}$

und  $n = \frac{N+n - (N-n)}{2}$ , oder die Abstände

der Beobachtungen von der Sonnenwende, wobey zu bemerken ist, daß zur Zeit der Sommersonnenwende der grössere Abstand von derselben der grössern Zenithdistanz oder kleinern Höhe, zur Zeit der Wintersonnenwende aber der kleinern Zenithdistanz oder grössern Höhe zugehört. Aus obigen Formeln siehet man, daß ein kleiner Fehler in dem Unterschied der Höhen  $\Delta h$  auf die Bestimmung des Abstands von der Sonnenwende einen kleinern Einfluß hat, wenn die Beobachtungen auf entgegengesetzten Seiten derselben liegen, weil alsdann der Nenner des Bruchs grösser wird.

#### §. 148.

Zur Erläuterung dieser Methode wähle ich folgende Zenithdistanzen der Sonne im Mittag, welche auf der königl. Sternwarte in *Greenwich* beobachtet wurden \*).

1788

\*) Astronomical observations made at the royal observatory at Greenwich in the year MDCCLXXXVIII. by Nevil Maskelyne. London 1789.

1788. Jun. 15  $28^{\circ} 21' 52''$ , o. Unt. Rand. ref. 29,7

27 50 20,0. Ob. R.

---

17. 28 18 22,1. U. R. — 29,6

27 46 49,2. O. R.

---

22. 28 16 29,4. U. R. — 29,5

27 45 2,8. O. R.

---

27. 28 25 10,2. U. R. — 29,3

27 53 37,3. O. R.

---

Dec. 14. 74 59 1,4. U. R. — 3' 35,4

74 26 32,6. O. R.

---

16. 75 4 13,5. U. R. — — 39,0

74 31 44,1. O. R.

---

20. 75 9 7,1. U. R. — — 40,6

74 36 37,6. O. R.

---

21. 75 9 6,9. U. R. — — 37,7

74 36 39,5. O. R.

---

22. 75 8 45,9. U. R. — — 39,8

74 36 13,1. O. R.

---

23. 75 7 47,4. U. R. — — 42,8

74 35 16,3. O. R.

Also



Also Jun. 15. u. R.  $28^{\circ} 21' 52'', 0$   
 o. R.  $27 \ 50 \ 20,0$

Summe  $= 56 \ 12 \ 12,0$

Z. D. Mittelp. d.  $\odot$   $28 \ 6 \ 6,0$

Collim. Fehler  $+ \ 6,0$  \*)

$28 \ 6 \ 12,0$

Stralenbr.  $+ \ 29,7$

$28 \ 6 \ 41,7$

Parallaxe  $- \ 3,9$

Wahre Zenithdist. d.  $\odot = 28 \ 6 \ 37,8$  d. 15 Jun.

ebenso  $- \ 28 \ 3 \ 7,3 \ 17 -$

$- \ 28 \ 1 \ 17,7 \ 22 -$

$- \ 28 \ 9 \ 55,1 \ 27 -$

Aus diesen Zenithdistanzen siehet man, daß die Sonnenwende zwischen d. 15 und 27 Jun. fällt. Der Unterschied der Zenithdistanzen d. 15 und 27 Jun. ist  $= 3' 17'', 3 = 197'', 3 = \Delta h$ . Die Zwischenzeit der Beobachtungen  $= 12$  Tagen  $= N + n$ , weil die Zenithdistanzen auf entgegengesetzten Seiten der Sonnenwende genommen sind. Also ist

$$N - n = \frac{0,080653 \cdot 197,3}{12} = 1,326 \text{ (§. 147. II Fall).}$$

$$N + n = 12,000$$

$$\text{Summe} = 13,326 = 2N.$$

$$\text{Unterschied} = 10,326 = 2n.$$

Daher ist  $N = 6,663$  und  $n = 5,337$  Tagen.

Da nun die erste Zenithdistanz kleiner ist als die

\*) Astronomical Observations made at the royal observatory at Greenwich in the year 1787 pag. 17. observ. Zenithdist.

die letzte, so ist jene 5,337 Tage vor der Sonnenwende genommen, folglich ist die Zeit der Sonnenwende Jun. 15. + 5,337 Tage oder Jun. 20,337.

Der Unterschied der Zenithdistanzen d. 22. und 27. Jun. ist  $= 8'37'',4 = 517'',7 = \Delta h$ . Die Zwischenzeit der Beobachtungen  $= 5$  Tagen  $= N - n$ , weil die Zenithdistanzen auf derselben Seite der Sonnenwende liegen. Also ist

$$N + n = \frac{0,080653 \cdot 517,7}{5} = 8,3509 \quad (\S. 147. \text{ I. Fall.})$$

$$N - n = 5,0000$$

$$\text{Summe} = 13,3509 \text{ und } N = 6,67545$$

$$\text{Untersch.} = 3,3509 \quad n = 1,67545$$

folglich wurde die Zenithdistanz d. 27. Jun. 6,67545 Tage nach der Sonnenwende beobachtet, und die Zeit der Sonnenwende wäre hienach Jun. 20,324.

Aus den Beobachtungen vom 15. und 22. Jun. findet sich auf dieselbe Art die Zeit der Sonnenwende Jun. 20,344. Das Mittel aus diesen drey Bestimmungen gibt

$$\text{Jun. 20,335 oder Jun. 20 } 8^h \cdot 2',4.$$

Hienach finden sich der Ordnung nach folgende Zwischenzeiten zwischen den Beobachtungen und zwischen der Sonnenwende

$$\begin{array}{r|l} \text{Jun. 15} & 5,324 \\ \text{17} & 3,324 \\ \text{22} & 1,676 \\ \text{27} & 6,676 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r|l} \text{Jun. 15} \\ \text{17} \\ \text{22} \\ \text{27} \end{array}} \right\} \text{Tage.}$$

Nun kann man den Unterschied zwischen den beobachteten Zenithdistanzen, und zwischen der in der Sonnenwende, berechnen. Es ist z. Beysp. für die Beobachtung vom 15. Jun.

$$n =$$

$$n=5,324; \text{Lg} n = 0,7262380$$

$$\text{Lg} n^2 = 1,4524760$$

$$\text{Lg} 12,3988 = 1,0933798$$

$$\underline{2,5458558}$$

gehört zu  $351'',44 = 5' 51'',4$

$$\text{beob. Zenithdist. 15. Jun.} = \underline{28^\circ 6' 37,8}$$

$$\text{Zenithdist. im Solstitio} = 28 \ 0 \ 46,4$$

$$\text{aus der Beob. vom 17. Jun.} \ 28 \ 0 \ 50,3$$

$$22. \text{ Jun.} \ 28 \ 0 \ 42,9$$

$$27. \text{ Jun.} \ 28 \ 0 \ 42,5$$

$$\text{Mittel} = \underline{28 \ 0 \ 45,5}$$

Die Zenithdistanzen vom December 1788 auf wahre reducirt sind folgende:

Dec. 14		74° 46' 20'',1
16		— 51 35,5
20		— 56 30,5
21		— 56 28,6
22		— 56 7,0
23		— 55 12,3

Die Beobachtungen vom 14 und 23 December geben, auf obige Art behandelt, die Zeit der Wintersonnenwende Dec. 20,5879

$$\text{vom 16 und 22 Dec.} \ 20,5977$$

$$\text{vom 14 und 20 Dec.} \ 20,5922$$

$$\text{Mittel} = \underline{20,5926}$$

$$\text{oder Dec. 20} \ 14^h \ 13',3$$

$$\text{Dec. 21} \ 2 \ 13,3 \text{ Morg. bürgerl. Zeit.}$$

Werden nun die Zenithdistanzen auf die Zeit der Sonnenwende reducirt, so erhält man

aus der Z. D. vom 14 Dec.  $74^{\circ} 56' 35'',5$

16 —  $56' 34,2$

20 —  $56' 35,5$

21 —  $56' 30,9$

22 —  $56' 35,0$

23 —  $56' 34,4$

Mittel =  $74' 56' 34,2$

in der Sommersonnenwende =  $28' 0' 45,5$

Summe =  $102' 57' 19,7$

Hälfte =  $51' 28' 39,85$

Breite von Greenwich.

### §. 149.

Es ist schon oben (§. 145.) bemerkt worden, daß bey diesen Untersuchungen auch der Veränderung der Schiefe der Ecliptic müsse Rechnung getragen werden. Die Veränderung der Schiefe der Ecliptic kommt theils von ihrer Secularabnahme, theils von dem Wanken der Erdaxe her. Erstere beträgt in einem Jahr  $0'',344$  nach H. von Zach Sonnentafeln, letztere ist = dem Product aus  $9'',55$  in den Cosinus des Mondsknotens, und muß zu der *mittlern* Schiefe addirt werden so lange  $\cos N$  positiv ist, abgezogen, wenn er negativ wird.

Nun war die Länge des aufsteigenden Mondsknotens d. 20. Jun. 1788 =  $8^{\text{Z.}} 16^{\circ} 16'$  =  $256^{\circ} 16'$ . d. 20. Dec. =  $8^{\text{Z.}} 6^{\circ} 34' = 246^{\circ} 34'$ . Setzt man die mittlere Schiefe der Ecliptic d. 20. Jun. 1788 =  $\omega$ , so ist ihre *scheinbare* Schiefe, wie sie aus den Beobachtungen folgt =  $\omega + 9'',55 \cos (256^{\circ} 16')$ . Den 20. Dec. war die mittlere Schiefe wegen der Secularabnahme

um

um  $\frac{0'',34}{2}$  oder  $0'',17$  kleiner, also die wahre

Schiefe  $= \omega - 0'',17 + 9'',55 \cos(246^\circ 34')$ .

Bey der Nutation muß nach *Ximenes* \*) noch eine Verbesserung, welche von der Länge der *Erdsnähe* des Monds abhängt, und sich auf  $2''$  erstrecken kann, angebracht werden. Sie muß von der nördlichen Nutation abgezogen, zu der südlichen addirt werden, wenn die *Erdsnähe* des Monds in dem *IX* Zeichen ist; ist aber des Monds *Erdsnähe* in dem Anfang des dritten Zeichens, so muß die Verbesserung zu der nordlichen Nutation addirt, und von der südlichen abgezogen werden. In dem Zeichen *O* und *VI* ist die Verbesserung  $= 0$ , in den übrigen dem Quadrat des Cosinus des Abstands vom Perigäo proportional. Die Länge der Erdferne des Monds ist d. 20. Jun.  $= 9^2 26^\circ 19'$ , also die Länge der *Erdsnähe*  $= 3^2 26^\circ 19'$ . d. 20. Dec.  $= 4^2 16^\circ 46'$ . Daher Nutat. d. 20. Jun.  $= -(2'',26 - 1'',63) = -0'',63$ . d. 20. Dec.  $= -(3''76 - 0'',99) = -2'',77$  und scheinbare Schiefe der Ecliptic

$$\text{d. 20. Jun.} = \omega - 0'',63$$

$$\text{d. 20. Dec.} = \omega - 2,77 - 0'',17$$

folglich war die scheinbare Schiefe der Ecliptic den 20. Dec. kleiner als den 20. Jun. um  $2,3$  Sec. Die Zenithdistanz würde also d. 20. Dec. wenn sich die Schiefe der Ecliptic nicht geändert hätte um  $2'',3$  größer oder  $= 74^\circ 56' 36'',5$  gewesen seyn.

Nun

\*) De Zach tabulae motuum Solis. pag. 56.

Nun ist Z. D. d. 20. Jun. =  $28^{\circ} 0' 45'',5$  (s. 148.)

reduc. Z. Dist. d. 20. Dec. =  $74 \ 56 \ 36,5$

Summe =  $102 \ 57 \ 22,0$

Breite =  $51 \ 28 \ 41,0$

Diff. =  $46 \ 55 \ 51,0$

Hälfte =  $23 \ 27 \ 5,55 =$

der scheinbaren Schiefe der Ecliptic den 20. Jun. 1788. Wird nun die Nutation mit *entgegengesetzten* Zeichen angebracht, so findet sich die mittlere Schiefe der Ecliptic =  $23^{\circ} 27' 56'',13$ .

Wird aber die *Verbesserung der Nutation nach Ximenes* weggelassen, so findet sich die Schiefe der Ecliptic im Dec. nur um 1,50 Sec. kleiner als im Jun. und

die Breite von Greenwich =  $51^{\circ} 28' 40'',6$

scheinb. Schiefe d. Ecliptic =  $23 \ 27 \ 55,1$

mittlere — — — =  $23 \ 27 \ 57,4$

#### §. 150.

Wenn man die Länge der Sonne als bekannt voraussetzt, so kann man die Zeit der Sonnenwenden bestimmen, und die Rechnung sehr abkürzen \*). Es ist hier zu bemerken, daß die Zeit der Sonnenwende durch nahe an derselben liegende Beobachtungen nicht genau bestimmt werden kann, weil ein kleiner Fehler in der Höhe oder Zenithdistanz einen großen Fehler in der Länge der Sonne hervorbringt. Zur Bestimmung der Sonnenlänge gebraucht man daher solche Höhen, die nahe bey der Tag- und Nachtgleiche genommen sind. Hat man

\*) De Zach tabulae motuum Solis, p. 62 et 63.

man durch solche Beobachtungen die Zeit, da die Sonne in  $0^{\circ} \gamma$  tritt, bestimmt, so findet man vermittelst der übrigen Elemente der Sonnentafeln die Zeit der Sonnenwenden genauer. Die Beobachtungen bey der Sonnenwende geben aber immer die Zeit derselben mit einer Genauigkeit, die zu der Reduction der Beobachtungen hinlänglich ist.

*Methoden, die Breite zu bestimmen, wobey die Abweichungen der Sterne als bekannt vorausgesetzt werden.*

### §. 151.

Man mißt eines Sterns Höhe oder Abstand vom Scheitel, bringt dabey die Verbesserungen wegen des Collimationsfehlers und der Strahlenbrechung an, so findet man nach §. 4. aus dem Abstand vom Scheitel und aus des Sterns scheinbarer Abweichung die Breite. Man gebraucht hiezu vorzüglich Sterne, die nahe am Zenith vorbegehen, theils weil daselbst die Strahlenbrechung geringe ist, theils um den Quadranten durch *Umwendung* (§. 42.) berichtigen zu können. Hier muß ebenfalls der Veränderung der Abweichung des Sterns in der Zwischenzeit Rechnung getragen werden.

*Beyspiel.* Tobias Mayer beobachtete mit dem gegen Norden gekehrten Mauerquadranten der Götting. Sternwarte folgende Abstände  $\gamma$  Draconis vom Zenith:



d. 22 Jul. 1756 | 0° 0' 2",6

d. 23 | 0 0 7,2

d. 24 | 0 0 9,2

d. 29 | 0 0 9,2

Da diese Zenithdistanzen auf dem Gradbogen noch zwischen 0° und 90° liegen, so fallen sie in den nördlichen Quadranten des Meridians, vorausgesetzt, daß der Collimationsfehler des Quadranten kleiner war als diese Abstände.

Als der Quadrant wieder gegen *Süden* aufgestellt war, fand Mayer

d. 7 Aug. 1756 | 0° 0' 9",2 | jenseits des

d. 8 — | 0 0 7,8 | Nullpuncts.

Da man die Veränderung der Abweichung in so kleinen Zwischenzeiten der Zeit proportional annehmen kann, so nehme man aus den Zeiten und aus den Zenithdistanzen ein Mittel. Auf diese Art findet sich

Jul. 25 | 0° 0' 7",05 Zenithdistanz.

Aug. 8 | 0 0 8,5

Die Abweichung  $\gamma$  Drac. 25 Jul. 56 =

51° 31' 41",6 nach Mayer

51 31 38,6 Bradley *Tabl. 29, 1*

51 31 36,6 de la Caille

Nutat. und Aber. d. 25 Jul  $\dagger 8,65 \dagger 11",18 = \dagger 19",73$

(§. 143.) d. 8. Aug.  $\dagger 8,34 \dagger 14,62 = \dagger 22,96$

Die Praecession beträgt nur  $-0",03$ , also war des Sterns Abweichung den 8. Aug. größer als den 25. Jul. um 3",20, folglich auch seine Zenithdistanz um eben so viel größer, weil sie auf der Nordseite war. Die Zenithdistanz d. 8. Aug. würde also, wenn des Sterns Abweichung sich nicht geändert hätte, gewesen seyn

= 0°



	=	0° 0' 5",30	
Z. D. d. 25. Jul.	=	0 0 7,05	
Untersch.	=	1,75	
Collim. Fehler	=	0,87	(§. 42.)
Summe	=	0 0 12,35	
Hälfte	=	0 0 6,17	wahre Z. Dist. 25. Jul.
scheinb. Abweich. *	=	51 32 1,33	nach Mayer
Untersch.	=	51 31 55,16	Breite (§. 4. I. I. Fall)
	=	— — 52	mit Bradley's
	=	— — 50	— de la Caille's
			Abw.

## §. 152.

Weil man zur Beobachtung der Sterne nahe am Zenith nur einen kleinen Gradbogen nöthig hat, so verfertigte man dazu eigene Instrumente von grossen Halbmessern mit einem Bogen von einigen Graden auf beyden Seiten des Nullpuncts, welche *Zenithsectoren* heissen. Mit solchen Instrumenten kann man zwar die Abstände vom Scheitel sehr genau messen. Allein die Genauigkeit der Breite hängt von der Genauigkeit der Abweichungen der Sterne ab, welche durch Mauerquadranten gefunden werden, folglich kann man die Breite mit Zenithsectoren nicht genauer bestimmen, als mit dem Mauerquadranten, mit welchem die Abweichungen der Sterne bestimmt sind. Verlangt man aber nur den *Unterschied* der Breiten zweyer Oerter, wie bey den Untersuchungen über die Gestalt der Erde, so braucht man weder den Collimationsfehler, noch die Abweichung des Sterns zu wissen, wenn man an beyden Oertern Zenithdistanzen *desselben* Sterns beobachtet (§. 5. S. 6.).

## Bestimmung der Breite durch Unterschiede der Höhen gegen Norden und Süden.

### §. 153.

Wenn man Mittagshöhen der Sterne sowohl in dem südlichen, als auch in dem nördlichen Quadranten des Mittagskreises nimmt, so kann man daraus den Collimationsfehler und die Breite zugleich finden. Man setze die Abweichung des gegen *Süden* culminirenden Sterns  $= \delta$ , so ist seine Mittagshöhe  $= 90^\circ - \varphi \pm \delta = H$ ,  $+$  für nördliche,  $-$  für südliche Abweichung. Die Abweichung des gegen *Norden* culminirenden Sterns setze  $= d$ , so ist seine Mittagshöhe über oder unter dem Pol  $= \varphi \mp (90^\circ - d) = h$ . Also die

Breite aus der südlichen Höhe

$$= \varphi = 90^\circ - H \pm \delta$$

aus der nördlichen Höhe

$$= \varphi = h \mp (90^\circ - d)$$

Also

$$2\varphi = 90^\circ - H \pm h \pm \delta \mp (90^\circ - d)$$

$$\text{I. } \varphi = \frac{\delta + d}{2} - \left( \frac{H - h}{2} \right) \quad \begin{array}{l} \text{für nördl. Abw.} \\ \text{und Höhen ü. d. Pol.} \end{array}$$

$$\text{II. } \varphi = \frac{d - \delta}{2} - \left( \frac{H - h}{2} \right) \quad \begin{array}{l} \text{für südl. Abw.} \\ \text{und Höhen ü. d. Pol.} \end{array}$$

$$\text{III. } \varphi = 90^\circ - \left( \frac{d - \delta}{2} \right) - \left( \frac{H - h}{2} \right) \quad \begin{array}{l} \text{für nördl. Abw.} \\ \text{u. Höhen unter d. Pol.} \end{array}$$

$$\text{IV. } \varphi = 90^\circ - \left( \frac{\delta + d}{2} \right) - \left( \frac{H - h}{2} \right) \quad \begin{array}{l} \text{für südl. Abw.} \\ \text{u. Höhen unt. d. Pol.} \end{array}$$

Hier kommen allein *Unterschiede* der Höhen vor, folglich hebt sich der Collimationsfehler

fehler auf beyden Seiten auf. Hat man die Breite nach dieser Methode gefunden, so kann man die Mittagshöhen der Sterne angeben, welche mit den beobachteten verglichen den Collimationsfehler bestimmen, oder wenn er bereits auf andere Art gefunden ist, berichtigen oder bestätigen.

*Beyspiel.* Den 1. April 1791 fand ich in *Altburg* die Mittagshöhe von  $\beta$  Cepheus unter dem Pol mit dem Quadranten

$$= 28^{\circ} 47' 30'',0 \text{ nach der } 90 \text{ Th.}$$

$$28 \cdot 46 \cdot 52,5 \quad - \quad - \quad 96 \text{ Th.}$$

den 2. April, Mittagshöhe des unteren Randes der Sonne

$$= 46^{\circ} 25' 30'',0 \text{ nach der } 90 \text{ Th.}$$

$$46 \cdot 25 \cdot 4,7 \quad - \quad - \quad 96 \text{ Th.}$$

Folglich im Mittel (mit Collimationsfehler  $23' 30''$  für die 90, und  $23' 15''$  für die 96 Th. §. 41.) \*)

$$\text{Mittagshöhe } \beta \text{ Cepheus} = 28^{\circ} 23' 48'',7$$

$$\text{Stralenbr.} = \quad \quad -1 \quad 45,1$$

$$\text{wahre Höhe} = 28 \quad 22 \quad 3,6 = h$$

beob.

\*) Wenn der Collimationsfehler so groß wie hier ist, so würde man anfangs eine fehlerhafte Stralenbrechung finden. In diesem Fall muß man, wenn man den Collim. Fehler nicht schon beynahe kennt, um die Stralenbrechung genau berechnen zu können, die Rechnung wiederholen.

beob. Mittagsh. der Sonne	=	46° 2' 24",8	
— Strahlenbrechung	=	0 0 55,0	
		<hr/>	
		46 1 29,8	
+ Parallaxe	=	0 0 5,9	
		<hr/>	
		46 1 35,7	
+ Halbmesser ☉	=	0 16 1,8	
		<hr/>	
w. Höhe der Sonne	=	46 17 37,5 = <i>H</i>	
— — β Cepheus	=	28 22 3,6 = <i>h</i>	
		<hr/>	
		17 55 33,9	
		<hr/>	
$\frac{H-h}{2}$	=	8 57 46,95	
scheinb. Abw. β Ceph.	=	69° 38' 38",3 = <i>d</i>	
Abweich. der ☉	=	5 0 34,0 = <i>δ</i>	
		<hr/>	
$\frac{d-\delta}{2}$	=	32 19 2,15	
		<hr/>	
$\frac{H-h}{2}$	=	8 57 46,95	
		<hr/>	
Aequatorshöhe	=	41 16 49,10	
		<hr/>	
		89 59 60,0	
		<hr/>	
Breite	=	48 43 10,9	
scheinb. Polardist. β Ceph.	=	20 21 21,7	
		<hr/>	
wahre Höhe β Cepheus	=	28 21 49,2	
Stralenbr.	=	+ 1 45,1	
		<hr/>	
scheinb. Höhe	=	28 23 34,3	
beobachtete H.	=	28 47 30,0 (90 Th.)	
		<hr/>	
90 Th. Collimationsfehler	=	23 55,7	
		<hr/>	
scheinb. Höhe	=	28 23 34,3	
		<hr/>	
		28 46 52,5 (96 Th.)	
		<hr/>	
96 Th. Collim. Fehler	=	0 23 18,2	

Wenn

Wenn man aus jeder Höhe besonders nach §. 4. die Breite bestimmt, ohne den Collimationsfehler in Rechnung zu bringen, so sind die beyden Bestimmungen um den gedoppelten Collimationsfehler voneinander verschieden. Die wahre Breite ist gleich dem arithmetischen Mittel aus beyden, der Collimationsfehler = ihrem halben Unterschied.

### §. 154.

Sind die Höhen wenig von einander verschieden, so kann man ihren Unterschied mit einem Micrometer messen. Alsdann sind auch die Strahlenbrechungen auf beyden Seiten einander bey nahe gleich, folglich auch die scheinbaren Höhenunterschiede den wahren. Man hat also hiezu nur eine mit einem Micrometer versehene Fernröhre mit einer Vorrichtung nöthig, vermittelt welcher man sie jedes mal in dieselbe Lage gegen den Horizont bringen kann. Diese Methode wurde zuerst von dem Dänischen Astronomen, *Pet. Horrebow*, gebraucht, und durch *Hell* weiter ausgeführt und angewandt. Man sehe die Wiener *Ephemeriden* für 1771, und die *Beyträge zu verschiedenen Wissensch. von einigen öst. Gelehrten. Wien 1775. S. 106. u. f. Röslers Handbuch der practischen Astronomie 1 Th. S. 311. u. f.*

Ohne Micrometer lassen sich die Höhenunterschiede auf folgende Art bestimmen. Man richte die Fernröhre nach dem unter der kleinern Höhe culminirenden Stern, und bringe sie hierauf in dieselbe Lage gegen den Horizont auf der andern Seite des Zeniths, wo man

die Zeit abwartet, da der andere Stern vor und nach seiner Culmination die Höhe des erstern erreicht. Aus den correspondirenden Höhen hat man die Zeit der Culmination des Sterns, folglich auch seinen Abstand von dem Mittagskreis. Da die Mittagshöhen beyder Sterne wenig von einander verschieden angenommen werden, so kann man den Unterschied der beobachteten Höhe des Sterns von seiner Mittagshöhe nach §. 134. berechnen, und also die Breite finden.

Wie man die *kreisförmige Blendung* in dem Sehfeld einer Fernröhre als ein Mikrometer gebrauchen, folglich auch Höhenunterschiede im Mittag messen könne, lehrt *la Lande. Astronomie* 2510. *H. Hofrath Kästner in Astron. Abhandl. II. Samml. S. 279. u. f.* und in dem *astron. Jahrbuch für 1796 S. 164. u. f.* Es wird dabey der scheinbare Weg des Sterns durch das Sehfeld der Fernröhre als eine *gerade* Linie angenommen, welches nur in dem Aequator statt findet (§. 135.) und in den Fällen wo des Sterns Polar-*distanz* klein ist, merkliche Fehler hervorbringen kann, die man aber nach *angef. und folg. §.* berechnen und verbessern könnte, wenn die Methode selbst einige Schärfe der Beobachtungen verstattete.

*Bestimmung der Breite vermittelt des  
Spiegelsextanten.*

§. 155.

Wenn man die Uhr berichtigt hat (§. 109. u. f.), so kann man nach derselben den Augenblick der Culmination der Sonne angeben. In diesem Augenblick messe man mit dem Sextanten die Höhe der Sonne (§. 78.), aus welcher man auf die bisher gezeigte Art die Breite findet.

Hat man keine Uhr, so nehme man gegen Mittag mehrere Höhen der Sonne, bis sie wieder anfangen abzunehmen. Die größte ist sehr nahe die Mittagshöhe (§. 159.). Ist man aber mit einer Uhr versehen, so nehme man mehrere Höhen vor der Culmination und dieselben Höhen nach der Culmination, wobey man jedesmal die Zeit der Uhr bemerkt. Die correspondirenden Höhen geben die Zeit der Culmination der Sonne und jeder Beobachtung Abstand vom Mittag. Hieraus findet sich die Mittagshöhe der Sonne, wenn man die Höhenänderung zu der beobachteten Höhe addirt (§. 134.).

*Beyspiel.* Ich beobachtete in *Göttingen* sehr nahe unter derselben Breite, unter welcher die Sternwarte liegt, mit dem 10 zolligen Sextanten von *Troughton* (§. 98.) und einem Queksilber Horizont mit dem Dache ohne ein schwimmendes Plänglas d. 11. März 1794. folgende gedoppelte Höhen des obern Sonnenrandes. Die Zeiten sind nach einer Secunden-

Ta-

**Taschenuhr, die nach mittlerer Zeit geht, angegeben.**

I.	23 <sup>U.</sup> 51' 38	70° 14' 45"
II.	— 53 0	— 16 5
III.	— 54 40	— 17 30
IV.	— 56 3	— 18 15
V.	— 57 30	— 19 0
VI.	— 58 32	— 19 25
VII.	— 59 25	— 19 50
VIII.	0 1 0	— 19 50
IX.	— 3 25	— 19 35
X.	— 4 28	— 19 20
XI.	— 5 55	— 18 50
XII.	— 7 28	— 18 5
XIII.	— 8 35	— 17 30
XIV.	— 10 20	— 16 5
XV.	— 11 40	— 14 45

Den Fehler des Index fand ich = 9' 30", 0 (§. 68.) additiv.

Die drey ersten Höhen correspondiren mit den drey letzten und geben die Zeit der Uhr im Mittag (§. 110.) 0<sup>U.</sup> 1' 39", 0; 40", 0; 37", 5, also im Mittel 0<sup>U.</sup> 1' 39" \*). Die Abweichung der Sonne war d. 11. Merz 1794 im Mittag für den Berliner Meridian (15' 53" östlich von Göttingen)

= 3° 30' 52" südlich

in 15' 53" Veränd. der Abw. — 0 14

Abw. der Sonne für Gött. = 3 30 38 =  $\delta$

Hätte

\*) Bey diesen Bestimmungen des wahren Mittags darf man keine so übereinstimmende Resultate erwarten wie bey corresp. Höhen, die weit vom Mittage genommen sind. Man hat aber auch hier keine sehr genaue Zeitbestimmung nöthig.



Hätte man bey diesen Beobachtungen keine Uhr gebraucht, so würde man die grösste Höhe  $70^{\circ} 19' 50''$  für die Mittagshöhe annehmen müssen. Hieraus findet sich die Breite auf folgende Art:

	$70^{\circ} 19' 50''$
Error ind.	$+ 9 30$
gedopp. Höhe =	$70 29 20$
einfache H. =	$35 14 40,0$
Refract.	$- 1 20,5$
	$35 13 19,5$
Parall. $\odot$	$+ 6,8$
	$35 13 26,3$
Halbm $\odot$	$- 16 8,1$
wahre Höhe =	$34 57 18,2$
Abw. $\odot$ südl. $+$	$3 30 38,0$
Aequat. Höhe =	$38 27 56,2$
Breite =	$51 32 3,8$

### §. 156.

Da man aber die Zeit des Mittags, und die Zeit jeder Beobachtung hat, so kann man alle Höhen die nicht weiter als 10 Minuten von dem Mittag entfernt sind, auf die Mittagshöhe mittelst der Formel §. 134. reduciren, und also an einem Mittag viele von einander unabhängige Bestimmungen der Breite erhalten, aus welchen man ein Mittel nimmt. } vide calcul 4

Die Höhenänderung am Mittag findet sich so:

R 5

$\phi =$

$$\begin{array}{rcl}
 \phi = 51^{\circ} 32' & \text{Lg cos} = & 9,7938317 - 10 \\
 \delta = 3 \ 31 & \text{Lg cos} = & 9,9991815 - 10 \\
 \hline
 \phi + \delta = 55 \ 3 & \text{C. Lg sin} = & 0,0863704 \\
 & \text{Lg const.} = & 0,2930199 \\
 & & \hline
 & & 0,1724035
 \end{array}$$

gehört zu  $1'',4873 = \text{Höhenänd. in 1 Min.}$

Die erste Höhe wurde beobachtet um  $23^{\text{U.}} 51' 38''$ , also  $10' 1''$  vor der Culmination der Sonne, wofür man 10 Min. annehmen darf. Das Quadrat davon 100 mit 1,487 multiplicirt gibt  $148'',7$  oder  $2' 28'',7$  um welches die beobachtete Höhe kleiner war, als die Mittagshöhe. Nun ist die erste Höhe auf wahre reducirt

$$\begin{array}{rcl}
 & = & 34^{\circ} 54' 45'',7 \\
 \text{Höhenänd.} = & & 2 \ 28,7 \\
 \hline
 \text{Mittagshöhe} = & 34 \ 57 \ 14,4 \\
 \text{Abw.} = & 3 \ 30 \ 38,0 \\
 \hline
 \text{Aequat. Höhe} = & 38 \ 27 \ 52,4 \\
 \text{Breite} = & 51 \ 32 \ 7,6
 \end{array}$$

Die Quadrate der zwischen jeder Beobachtung und zwischen dem wahren Mittag verflossenen Anzahl von Minuten sind der Ordnung nach folgende:

I. 100,0	VI. 9,6	XI. 18,5
II. 72,2	VII. 4,8	XII. 33,6
III. 49,0	VIII. 0,4	XIII. 47,6
IV. 31,4	IX. 3,2	XIV. 75,7
V. 17,2	X. 7,8	XV. 100,0

Wird hiemit die Höhenänderung in einer Minute multiplicirt, so findet man den Unterschied zwischen jeder beobachteten Höhe und der

der Mittagshöhe; daraus die Mittagshöhen selbst und folgende Breiten:

I.	$51^{\circ} 32' 7'', 6$	VI.	$51^{\circ} 32' 2'', 0$	XI.	$51^{\circ} 32' 6'', 2$
II.	— 32 8,8	VII.	— 31 56,7	XII.	— 32 6,2
III.	— 32 0,8	VIII.	— 32 3,2	XIII.	— 32 2,8
IV.	— 32 4,5	IX.	— 32 6,5	XIV.	— 32 3,8
V.	— 32 3,2	X.	— 32 7,1	XV.	— 32 7,6

Breite im Mittel  $51^{\circ} 32' 4'', 5$

Wenn man nicht die aus jeder Beobachtung besonders folgende Breite, sondern nur das Mittel aus allen verlangt, so läßt sich die Rechnung auf folgende Art abkürzen. Da die Höhen nur wenig von einander verschieden sind, so bleibt die Strahlenbrechung und Parallaxe für jede Höhe dieselbe; die Abweichung der Sonne im Mittag, ihren Halbmesser, den Fehler des Index kann man ebenfalls als beständige Größen betrachten. Folglich kommen bey dem Mittel aus allen die algebraischen Summen dieser Größen durch ihre Anzahl dividirt, und die Summe der Höhenänderungen am Mittag durch ihre Anzahl dividirt vor. Man bekommt daher die Breite im Mittel, wenn man das Mittel aus allen beobachteten Höhen nimmt, zu demselben das Mittel der Höhenänderungen am Mittag addirt, und aus dieser mittlern scheinbaren Höhe die Breite auf obige Art herleitet. Da die Höhenänderungen am Mittag dem Product des Quadrats des Abstands vom Mittage in die Höhenänderung in einer Minute gleich sind, so erhält man die Höhenänderung im Mittel, wenn man das Mittel jener Quadratzahlen mit der Höhenänderung in einer Minute multiplicirt. So findet

findet sich das Mittel aus den beobachteten gedoppelten Höhen

$$\begin{array}{rcl}
 & = & 70^{\circ} 17' 55'',3 \\
 \text{Collim. Fehler} & + & 9 \quad 30,0 \\
 \hline
 & & 70 \quad 27 \quad 25,3 \\
 \text{einfache Höhe} = & 35 \quad 13 \quad 42,65
 \end{array}$$

Das Mittel aus den oben angegebenen Quadraten der Abstände vom Mittag 38,08 mit der Höhenänderung in einer Minute  $1'',4873$  multiplicirt gibt  $56'',64$ , welches zu  $35^{\circ} 13' 42'',65$  addirt die auf den Mittag reducirte Höhe gibt

$$\begin{array}{rcl}
 & & 35^{\circ} 14' 39'',3 \\
 \text{Refract.} & - & 1 \quad 20,5 \\
 \hline
 & & 35 \quad 13' \quad 18,8 \\
 \text{Par. } \odot & + & \quad \quad 6,8 \\
 \hline
 & & 35 \quad 13 \quad 25,6 \\
 \text{Halbm. } \odot & - & 16 \quad 8,1 \\
 \hline
 \text{w. Höhe} = & 34 \quad 57 \quad 17,5 \\
 \text{Abw.} = & 3 \quad 30 \quad 38,0 \\
 \hline
 \text{Aequat. Höhe} = & 38 \quad 27 \quad 55,5 \\
 \text{Breite} = & 51 \quad 32 \quad 4,5
 \end{array}$$

§. 157.

Die Abweichung der Sonne wurde in der Zwischenzeit der Beobachtungen bisher als unverändert angenommen, indem man die nach der Formel §. 134. berechnete Höhenänderung als die wahre Höhenänderung der Sonne, und das Mittel der Zeiten der correspondirenden Höhen als den wahren Mittag betrachtete. Die von dieser Voraussetzung herührenden Fehler würden sehr beträchtlich, wenn

wenn man vermittelst der Zeit des *wahren* Mittags die Höhenänderung berechnet hätte, weil die Veränderung der Abweichung der Sonne in einer Minute beynahe eine Secunde betragen kann, und nahe am Mittag sehr nahe eine gleiche Aenderung in der Sonnenhöhe hervorbringt. Allein da man die aus den correspondirenden Höhen gefundene Zeit als die Zeit des wahren Mittags angesehen hat, so heben sich die von beyden Voraussetzungen herührenden Fehler beynahe gegen einander auf.

Will man aber die Rechnung genau führen so muß man vermittelst der Abstände vom *wahren* Mittag die Höhenänderung nach §. 134. berechnen, und aus der auf diese Art gefundenen Mittagshöhe mit der Abweichung der Sonne *für den Augenblick der Beobachtung* die Breite herleiten, oder, wenn man alle Höhen auf den Mittag reduciren und aus ihrem Mittel mit der Abweichung der Sonne für den wahren Mittag die Breite herleiten will, zu der berechneten Höhenänderung die Veränderung der Abweichung der Sonne in der Zeit ihres Abstands vom Mittag addiren oder davon abziehen, je nachdem die Sonne in den aufsteigenden oder niedersteigenden Zeichen ist, und die Beobachtung vor der Culmination gemacht ist, umgekehrt wenn man die Höhe nach dem Durchgang der Sonne durch den Mittagskreis genommen hat.

Daß die Verbesserung des Mittags für so kleine Stundenwinkel, wenn gleich die Veränderung der Abweichung der Sonne in der Zwischenzeit der Beobachtungen klein ist, doch

doch sehr beträchtlich werden könne, siehet man aus der Formel §. 111, der eine Theil der Mittagsverbesserung wird durch den sinus des Stundenwinkels dividirt, oder mit seiner Cosecante multiplicirt, der andere wird mit der Cotangente des Stundenwinkels multiplicirt. Für die correspondirenden Höhen §. 155. findet sich die Mittagsverbesserung  $= -19,76$  Sec. folglich die Zeit des wahren Mittags  $0^u. 1' 39'' - 19'',8 = 0^u. 1' 19'',2$ . Hienach ist der Abstand der ersten Beobachtung vom Mittag  $= 9' 41'' = 9',7$ ; das Quadrat davon  $= 94,09$  mit  $1,4873$  (Höhenänd. in einer Minute) multiplicirt gibt  $2' 19'',9$ . Die Veränderung der Abweichung der Sonne in  $9,7$  Min. beträgt  $9'',5$ , folglich ist die ganze Höhenänderung, weil die Sonne in den aufsteigenden Zeichen und die Beobachtung vor ihrer Culmination gemacht war  $= 2' 19'',9 + 9'',5 = 2' 29'',4$ . Die erste Höhe, durch Collimationsfehler, Strahlenbrechung, Parallaxe und Halbmesser der Sonne verbessert, ist

$$\begin{array}{rcl}
 & & = 34^\circ 54' 45'',7 \\
 \text{Höhenänd.} & & + \quad 2 \quad 29,4 \\
 \hline
 \text{Mittagshöhe} & = & 34 \quad 57 \quad 15,1 \\
 \text{Abweich. im Mittag} & = & 3 \quad 30 \quad 38,0 \\
 \hline
 \text{Aequatorshöhe} & = & 38 \quad 27 \quad 53,1 \\
 \text{Breite} & = & 51 \quad 32 \quad 6,9
 \end{array}$$

### §. 158.

Aus den Höhen nahe am Mittag kann man, wenn auch unter denselben keine übereinstimmende wären, die Zeit des wahren Mittags auf

auf folgende Art herleiten. Es seye die Mittagshöhe  $= H$ , die Höhenänderung in einer Minute vor oder nach der Culmination  $= \Delta H$ , die Veränderung der Abweichung der Sonne in einer Minute  $= \pm \Delta \delta$ . (das obere Zeichen in den aufsteigenden, das untere in den niedersteigenden Zeichen). Eine Höhe  $N$  Minuten vor der Culmination seye  $= h$ , so ist  $h = H - \Delta H \cdot N^2 \mp \Delta \delta \cdot N$  nach dem vorhergehenden.

Eine zweyte Höhe  $h'$ , welche man  $n$  Minuten *nach* dem Durchgang der Sonne durch den Mittagskreis genommen hat, wird seyn

$$= H - \Delta H \cdot n^2 \pm \Delta \delta \cdot n$$

Wird von dieser Höhe die erste abgezogen, so findet sich

$$h' - h = \Delta H(N^2 - n^2) \pm (N \mp n) \Delta \delta.$$

$$= \Delta H(N \mp n)(N + n) \pm (N \mp n) \Delta \delta.$$

$N \mp n$  ist hier die Zwischenzeit der Beobachtungen in Minuten ausgedrückt,  $h' - h$  der Unterschied der Höhen, folglich findet man aus dieser Gleichung

$$N - n = \frac{h' - h \mp (N \mp n) \Delta \delta}{\Delta H(N \mp n)}$$

$$\text{I.} = \frac{h' - h}{\Delta H(N \mp n)} \mp \frac{\Delta \delta}{\Delta H}$$

und daraus ferner

$$N = \frac{N \mp n + N - n}{2}$$

$$n = \frac{N \mp n - (N - n)}{2}$$

wobey zu bemerken ist, daß der größera Stundenwinkel  $N$  immer der kleinern Höhe zuge-

zugehört. Da man nun die Zeit der Uhr in dem Augenblick einer jeden Beobachtung kennt, so findet man die Zeit des wahren Mittags, wenn man die vormittäglichen Stundenwinkel zu den Zeiten der ihnen zugehörigen Beobachtungen addirt, die nachmittägen aber davon abzieht.

Sind die *beyden* Höhen *vor* oder *nach* dem Durchgang der Sonne durch den Mittagskreis genommen, so ist für den ersten Fall:

$$h = H - \Delta H. N^2 \mp \Delta \delta. N$$

$$h' = H - \Delta H. n^2 \mp \Delta \delta. n$$

$$h' - h = \Delta H(N^2 - n^2) \pm \Delta \delta(N - n)$$

$$\text{II. folglich } N \mp n = \frac{h' - h}{\Delta H(N - n)} \mp \frac{\Delta \delta}{\Delta H}.$$

für den zweyten Fall findet sich:

$$h = H - \Delta H. N^2 \pm \Delta \delta. N$$

$$h' = H - \Delta H. n^2 \pm \Delta \delta. n$$

$$h' - h = \Delta H(N^2 - n^2) \mp \Delta \delta(N - n)$$

$$\text{III. folglich } N \mp n = \frac{h' - h}{\Delta H(N - n)} \pm \frac{\Delta \delta}{\Delta H}$$

Hier ist die Zwischenzeit der Beobachtungen  $= N - n$ , die Formeln geben  $N \mp n$ , folglich findet man wieder, wie oben,  $N$  und  $n$ , und daraus die Zeit des wahren Mittags.

Man findet z. B. aus der ersten und dreyzehnten Höhe §. 155. die Zeit des wahren Mittags auf folgende Art. Der Unterschied der *gedoppelten* Höhen ist  $2' 45''$ , folglich der Unterschied der *einfachen* Höhen  $= 1' 22'',5 = 82'',5 = h' - h$ . Die Zwischenzeit der Beobachtungen  $= 16' 57'',0 = 16,95$  Minuten,  $= N \mp n$ . (I.) Die Abnahme der südlichen Ab-

wei-



weichung der Sonne (Annäherung zum Nordpol) vom 11. bis 12. März  $= 23' 33''$ , folglich die Veränderung der Abweichung der Sonne in einer Minute  $= 0'',981 = +\Delta\delta$ . Nach §. 156.  $\Delta H = 1'',4873$ . Also

$$\begin{aligned}
 \text{(I.) } N - n &= \frac{82,5}{16,95, 1,4873} - \frac{0,981}{1,4873} \\
 &= 3,272 - 0,659 = 2,613 \text{ Min.} \\
 N + n &= 16,950 \\
 2N &= 19,563. \text{ Summe} \\
 N &= 9,7815 \text{ Min.} \\
 2n &= 14,337. \text{ Diff.} \\
 n &= 7,1685 \text{ Min.}
 \end{aligned}$$

Da nun die um  $23^u. 51' 38''$  genommene Höhe die kleinere ist, so gehört ihr der grössere Stundenwinkel  $9,7815 \text{ Min.} = 9' 46'',9$  zu. Folglich wäre die Zeit des wahren Mittags  $23^u. 51' 38'' + 9' 46'',9 = 0^u. 1' 24'',9$ .

Um auch ein Beyspiel zu geben, wie man 2 Höhen, die auf *derselben* Seite des Mittagskreises genommen sind, vergleiche, nehme ich die beyden nach dem Durchgang der Sonne durch den Mittagskreis beob. Höhen IX und XV. §. 155. Der Unterschied der gedoppelten Höhen ist  $= 4' 50''$ ; der Unterschied der einfachen  $= 2' 25'' = 145''$ . Die Zwischenzeit der Beobachtungen  $= 8' 15'' = 8,25 \text{ Min.} = N - n$  (II. 2ter Fall.). Also

$$\begin{aligned}
 \text{(II.) } N+n &= \frac{145}{8,25 \cdot 1,4873} + \frac{0,981}{1,4873} \\
 &= 11,8174 + 0,659 = 12,4764 \\
 N-n &= 8,2500 \\
 2N &= 20,7264 \\
 &\text{Summe.} \\
 N &= 10,3632 \\
 2n &= 4,2264 \\
 &\text{Diff.} \\
 n &= 2,1132
 \end{aligned}$$

Folglich war die IX Höhe 2,113 Min. oder 2' 6",8 nach dem Durchgang der Sonne durch den Mittagskreis genommen, und die Zeit des wahren Mittags findet sich, wenn man 2' 6",8 von der Zeit der Beobachtung 0<sup>u</sup>. 3' 25" abzieht, also 0<sup>u</sup>. 1' 18",2.

### §. 159.

Setzt man in der Formel (I. §. 158.)  $h'=h$ , so wird

$$\frac{N-n}{2} = \mp \frac{\Delta\delta}{2 \cdot \Delta H} = \text{der Mittagsverbesserung.}$$

Diese ist für alle Höhen, die nicht weiter als 10 Minuten von dem Mittag genommen sind, brauchbar, und hängt nicht von der Größe des Stundenwinkels, sondern allein von der Breite und der Abweichung der Sonne ab.

Für die correspondirenden Höhen §. 155. findet sich also, weil  $\Delta\delta = +0'',981$ , weil die Sonne in den aufsteigenden Zeichen ist,  $\Delta H = 1'',4873$  (§. 156.)

$$\frac{N-n}{2} = \frac{0,981}{2,9746} = 0',3298 = 19'',79 +.$$

Oben

Oben §. 57. wurde gefunden 19,8 Secunden.

Die beyden Höhen kann man so nahe beyeinander nehmen, daß ihre Zwischenzeit kleiner ist als die Mittagsverbesserung, welche *constant* ist, folglich findet die *größte* Höhe der Sonne, welche zwischen die beyden gleichen Höhen fallen muß, nicht in dem Mittagskreis statt, sondern *vor* ihrem Durchgang durch den Mittagskreis, wenn die Sonne in den *niedersteigenden*, *nach* demselben, wenn sie in den *aufsteigenden* Zeichen ist.

Die Höhe der Sonne  $n$  Minuten nach ihrem Durchgang durch den Mittagskreis ist  $= h' = H - \Delta H. n^2 + \Delta \delta. n$  für aufsteigende Zeichen (§. 158.). In dieser Gleichung kann man  $H, \Delta H, \Delta \delta$  als unveränderlich betrachten, und  $n$  so klein annehmen, daß  $\Delta \delta. n > \Delta H. n^2$ , folglich wächst die Höhe der Sonne noch *nach* ihrem Durchgang durch den Mittagskreis. Differentiirt man diese Gleichung, indem man  $h'$  und  $n$  als veränderlich betrachtet, so findet sich:

$$\frac{dh'}{dn} = -2n\Delta H + \Delta \delta$$

dieses  $= 0$  gesetzt gibt für das *Maximum*

$$n = \frac{\Delta \delta}{2. \Delta H}$$

So viele Minuten nach dem wahren Mittag erreicht die Sonne ihre *größte* Höhe, wenn sie in den *aufsteigenden* Zeichen ist.

In den *niedersteigenden* Zeichen erreicht sie ihre *größte* Höhe  $\frac{\Delta \delta}{2. \Delta H}$  Minuten *vor* ihrem Durchgang durch den Mittagskreis.

Dieses stimmt mit der oben gefundenen Mittagsverbesserung überein; denn wird die Zwischenzeit der gleichen correspondirenden Höhen  $= 0$  gesetzt, so findet sich die größte

Höhe  $\frac{\Delta \delta}{2. \Delta H}$  Minuten vor oder nach der

Sonne Durchgang durch den Meridian. Die Zeit des *unverbesserten* Mittags aus correspondirenden Höhen nahe an dem Mittag ist also die Zeit der größten Höhe der Sonne.

*Wenn man unter der Zeit der Culmination der Sonne den Augenblick ihrer größten Höhe versteht, so sind die Zeiten der Culmination und des Durchgangs durch den Mittagskreis verschieden.*

Setzt man den zu der größten Höhe der Sonne gehörigen Werth von  $n$  in die Gleichung  $h' = H - \Delta H. n^2 + \Delta \delta. n$ , so findet sich der Unterschied zwischen der größten Höhe der Sonne und zwischen ihrer Mittagshöhe

$= \frac{\Delta \delta}{4. \Delta H} \cdot \Delta \delta$ ; also für obiges Beyspiel  
 $= 0,1649. 0'',981 = 0'',16$ .

Bey dem Mond kann dieser Unterschied sehr merklich werden. Den 9. Sept. 94 um Mitternacht ist nach d. *Jahrbuch* für 94 die Abweichung des Monds  $= 6^\circ 0'$  südlich. d. 10.  $= 0^\circ 54'$  südl. Hieraus findet sich für die Breite von Göttingen  $\Delta H = 1'',4597$ . Die Veränderung der Abweichung des Monds in einer Minute  $= 12,75 \text{ Sec.} = \Delta \delta$ . Folglich ist der Unterschied zwischen der Mittagshöhe und zwischen der größten Höhe des Monds  $= 28,2$   
 Secun-

Secunden. Diese größte Höhe erreicht der Mond 4,428 Min. oder 4' 25",68 nach seinem Durchgang durch den Meridian. Hier würde man also einen beträchtlichen Fehler begehen, wenn man, um die Mittagshöhe des Monds zu messen, ihn nahe am Meridian mit dem Quadranten verfolgen und seine größte Höhe als die Mittagshöhe ansehen wollte.

*Aus zweyen Höhen, wovon die eine nahe am Meridian, die andere weit von demselben genommen ist, und aus der Zwischenzeit der Beobachtungen die Breite zu finden.*

§. 160.

Es seye die von dem Mittag entferntere Höhe  $= h$ , die nahe an demselben liegende  $= h'$ , die Stundenwinkel  $t$  und  $t'$ , so ist nach §. 111.

$$\begin{aligned} \sin h' &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t' \\ \sin h &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \end{aligned}$$


---


$$\begin{aligned} \text{also } \sin h' - \sin h &= \cos \varphi \cos \delta (\cos t' - \cos t) \\ &= \cos \varphi \cos \delta \sin \left( \frac{t+t'}{2} \right) \sin \left( \frac{t-t'}{2} \right) \end{aligned}$$

Liegen beyde Höhen auf *derselben* Seite des Mittagskreises, so ist die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen in Grade verwandelt

$$= \frac{t-t'}{2}, \text{ folglich hat man}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(I.) } \sin\left(\frac{t+t'}{2}\right) &= \frac{\sin h' - \sin h}{2 \cos \varphi \cos \delta \sin\left(\frac{t-t'}{2}\right)} \\
 &= \frac{\cos\left(\frac{h'+h}{2}\right) \sin\left(\frac{h'-h}{2}\right)}{\cos \varphi \cos \delta \sin\left(\frac{t-t'}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

$$\text{Also } t' = \frac{t+t'}{2} - \frac{t-t'}{2}.$$

Liegen aber die beyden Höhen auf *entgegen-*  
*gesetzten* Seiten des Mittagskreises, so ist  
 $\frac{t+t'}{2}$  die halbe Zwischenzeit der Beobach-  
 tungen in Grade verwandelt, und

$$\begin{aligned}
 \text{(II.) } \sin\left(\frac{t-t'}{2}\right) &= \frac{\sin h' - \sin h}{2 \cos \varphi \cos \delta \sin\left(\frac{t+t'}{2}\right)} \\
 &= \frac{\cos\left(\frac{h+h'}{2}\right) \sin\left(\frac{h'-h}{2}\right)}{\cos \varphi \cos \delta \sin\left(\frac{t+t'}{2}\right)}
 \end{aligned}$$

Folglich wieder:

$$t' = \frac{t+t'}{2} - \frac{t-t'}{2}$$

Setzt man in der Gleichung für  $\sin h'$  den  $\cos t'$   
 $= 1 - 2(\sin \frac{1}{2} t')^2$ , so wird

$$\begin{aligned}
 \sin h' &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta - \\
 &\quad 2(\sin \frac{1}{2} t')^2 \cos \varphi \cos \delta \\
 &= \cos(\varphi - \delta) - 2(\sin \frac{1}{2} t')^2 \cos \varphi \cos \delta
 \end{aligned}$$

Für

Für südliche Abweichungen wird

$$\sin h' = \cos(\varphi + \delta) - 2(\sin \frac{1}{2}t')^2 \cos \varphi \cos \delta$$

Es ist aber der Sonne Abstand vom Zenith im Meridian  $= \varphi + \delta$ , folglich, wenn die Mittagshöhe  $H$  heißt  $\cos(\varphi + \delta) = \sin H$ , also

$$(III.) \sin H = \sin h' + 2(\sin \frac{1}{2}t')^2 \cos \varphi \cos \delta$$

Weil nun die eine Höhe  $h'$  nahe an dem Mittag genommen ist, so wird der Werth von  $\frac{t-t'}{2}$  nicht merklich geändert, wenn  $\varphi$  et-

was unrichtig angenommen wäre. Man nimmt daher die Breite nach Schätzung an, und berechnet mit dieser angenommenen Breite den Stundenwinkel  $t'$  nach I. oder II., daraus findet man nach III. die Mittagshöhe und die Breite. Weicht diese sehr von der angenommenen Breite ab, so sucht man vermittelst dieser Breite den Stundenwinkel  $t'$  und die Mittagshöhe von neuem, um die Breite genau zu bekommen.

Um die Formel III. mit Logarithmen berechnen zu können, setze man

$$2(\sin \frac{1}{2}t')^2 \cos \varphi \cos \delta = \sin M, \text{ so wird}$$

$$(IV.) \sin H = 2 \sin \left( \frac{h' + M}{2} \right) \cos \left( \frac{h' - M}{2} \right)$$

Die Abweichung wird in der Zwischenzeit der Beobachtungen als unverändert angenommen, man berechnet sie daher für den in die Mitte der beyden Beobachtungen fallenden Zeitpunkt.

*Beyspiel.* Ich beobachtete in der Gesellschaft des H. von Zach in Molschleben, einem Dorfe in der Nähe von Gotha, dessen Lage

Lage gegen die Gothaische Sternwarte durch Dreycke bestimmt ist \*), mit einem 4zolligen Spiegelsextanten d. 28. Sept. 1793 folgende gedoppelte Höhen des obern Sonnenrandes. Die Zeiten sind nach H. von Zach *Chronometer* angegeben, und von den gedoppelten Höhen müssen  $17' 45''$  (*Error indicis*) abgezogen werden.

$$21^u \quad 1' 19'',2 | 54^\circ 0' 0''$$

$$23 \quad 37 \quad 4,0 | 74 \quad 14 \quad 30$$

$$\text{Hier ist also } h' = 36 \quad 41 \quad 11,8$$

$$h = 26 \quad 33 \quad 21,0$$

$$\frac{h' + h}{2} = 31 \quad 37 \quad 16,4$$

$$\frac{h' - h}{2} = 5 \quad 3 \quad 55,4$$

Die Zwischenzeit der Beobachtungen ist  $= 2^{\text{St}} 35' 46'',5$ , wozu  $1'',7$  addirt werden muß, weil die Uhr in 24 St. um  $15'',59$  zurück blieb,

und es findet sich  $\frac{t - t'}{2} = 19^\circ 28' 18'',7$  weil

die beyden Höhen auf derselben Seite des Meridians genommen sind. Die Abweichung der Sonne ist  $= 2^\circ 14' 9''$  *südl.*  $= \delta$ . Die Breite  $\phi$  ist  $= 51^\circ 0' 50''$ . Statt dieser nehme ich  $51^\circ 10' 50''$ , also die Breite um 10 Min. zu groß an, weil ich sie hief noch nicht als genau bekannt vorausseze. Nun hat man nach I.

Lg

\*) Astron. Jahrbuch f. 1793. S. 170.



$$\text{Lg} \cos \left( \frac{h' + h}{2} \right) = 9,9302014$$

$$\text{Lg} \sin \left( \frac{h' - h}{2} \right) = 8,9459242$$

$$\text{C. Lg} \cos \varphi = 0,2028237$$

$$\text{C. Lg} \cos \delta = 0,0003307$$

$$\text{C. Lg} \sin \left( \frac{t - t'}{2} \right) = 0,4771072$$

$$\text{Lg} \sin \left( \frac{t + t'}{2} \right) = 9,5563872$$

$$\frac{t + t'}{2} = 21^{\circ} 6' 16'',2$$

$$\frac{t - t'}{2} = 19 \ 28 \ 18,7$$

$$t' = 1 \ 37 \ 57,5$$

$$\frac{1}{2} t' = 0 \ 48 \ 58,7$$

$$\text{Lg} 2 = 0,3010300$$

$$\text{Lg} (\sin \frac{1}{2} t')^2 = 16,3074310$$

$$\text{Lg} \cos \varphi = 9,7971763$$

$$\text{Lg} \cos \delta = 9,9996693$$

$$\text{Lg} \sin M = 6,4053066$$

$$M = 0^{\circ} 0' 52'',5$$

Weil der Winkel  $M$  sehr klein ist, so kann man den Bogen seinem Sinus gleich setzen, und man findet  $\text{Lg} M$  in Secunden ausgedrückt, wenn man den  $\text{Log} \frac{1}{e}$  zu dem  $\text{Lg} \sin M$  addirt.

$$\text{Lg sin } M = 6,4053066 - 10$$

$$\text{Lg } \frac{1}{e} = 5,3144251$$

$$\text{Lg } M = 1,7197317$$

$$M = 52'',44$$

$$h' = 36^\circ 41' 11,8$$

$$\frac{h' + M}{2} = 18 \quad 21 \quad 2,1$$

$$\frac{h' - M}{2} = 18 \quad 20 \quad 9,7$$

$$\text{Lg } 2 = 0,3010300$$

$$\text{Lg sin } \left( \frac{h' + M}{2} \right) = 9,4980768$$

$$\text{Lg cos } \left( \frac{h' - M}{2} \right) = 9,9773708$$

$$\text{Lg sin } H = 9,7764776$$

$$H = 36^\circ 42' 13'',7$$

$$\text{Abweich. d. } \odot = 2 \quad 16 \quad 56,0$$

$$\text{Aeq. Höhe} = 38 \quad 59 \quad 9,7$$

$$\text{Breite} = 51 \quad 0 \quad 50,3$$

Unmittelbar aus der Mittagshöhe fand ich diese Breite  $= 51^\circ 0' 44'' 6$ .

Wenn man den Bogen  $t'$  in Zeit verwandelt, so findet sich, daß die Höhe  $6' 31'',9$  vor dem Durchgang der Sonne durch den Mittagkreis genommen war. Da dieser Abstand vom Mittag kleiner ist als 10 Min. so könnte man den Unterschied zwischen der größern Höhe und zwischen der Mittagshöhe nach §. 134. berechnen.

## §. 161.

Diese Methode, die Breite zu bestimmen, wurde von H. *Douwes* vorgeschlagen, und zuerst in dem I. Band der *Abhandlungen* der gelehrten Gesellschaft zu *Harlem* bekannt gemacht. Einen sehr guten Aufsatz darüber von Herrn Prof. *Nieuwland* findet man in dem ersten Supplementenband zu H. Bode's astron. Jahrbüchern S. 42 u. f. *Directe* Auflösungen jener Aufgabe in H. Hofrath *Kästners astron. Abhandlungen*, I. Samml. S. 413. in obigem Aufsatz von H. Prof. *Nieuwland* u. a. O.

H. *Douwes* hat *Hülftafeln* zur Abkürzung der Rechnung verfertigt, die sich sammt der Erklärung ihres Gebrauchs in den *Tables requisite to be used with the nautical ephemeris for finding the latitude and longitude at sea*, II. edition pag. 58-80 befinden. Diese Tafeln geben die Werthe von

$\text{Lg sec.} \left( \frac{t-t'}{2} \right)$  oder C.  $\text{Lg sin} \left( \frac{t-t'}{2} \right)$  für die Stundenwinkel in Zeit von  $0^{\text{U.}}$  bis  $5^{\text{U.}} 50'$  unter der Aufschrift  $\text{Lg } \frac{1}{2} \text{ elaps. time}$ , von

$\text{Lg } 2. \sin \left( \frac{t+t'}{2} \right)$  ebenfalls von  $0^{\text{U.}}$  bis  $5^{\text{U.}} 50'$

unter der Aufschrift *Lg. middle time*, endlich die Werthe von  $\text{Lg sin. vers. } t'$  oder  $\text{Lg } 2 (\sin \frac{1}{2} t')^2$  von  $0^{\text{U.}}$  bis  $8^{\text{U.}} 50'$  unter der Aufschrift *Lg. rising* für den Halbmesser 100 000 von 10 zu 10 Sec. in Zeit an. Die Summe der arithmetischen Complementary von  $\text{Lg cos } \varphi$  und  $\text{Lg cos } \delta$

heißt daselbst *Log. ratio*. Statt  $2 \cos \left( \frac{h'+h}{2} \right)$   
sin

$\sin\left(\frac{h' - h}{2}\right)$  §. 160. wird der Logarithme des  
 Unterschieds der natürlichen Sinus für den  
 Halbmesser 100 000 genommen. Man findet  
 also  $\text{Lg.} \sin\left(\frac{t + t'}{2}\right)$  oder Lg. middle time  
 $= \text{Log. ratio} + \text{Lg.} (\sin h' - \sin h) + \text{Lg. half}$   
 $\text{claps. time.}$  Dieser Logarithme in den Ta-  
 feln aufgesucht, gibt  $\frac{t + t'}{2}$  also hat man  $t'$   
 nach §. 160. Nun wird von dem Log. rising  
 für  $t'$  der Log. ratio abgezogen, die dazu ge-  
 hörige Zahl aufgesucht, und zu dem Sinus  
 der größten Höhe (für den Halbmesser 100 000)  
 addirt, so hat man den sinus der Mittagshöhe.

*Man hat zween bekannte Sterne, wovon  
 der eine in dem nordlichen, der andere in  
 dem südlichen Theil des Meridians culmi-  
 nirt in gleichen aber unbekannten Höhen,  
 und die Zeiten beobachtet, da die Sterne  
 diese Höhen erreichten, man soll daraus  
 die Breite finden.*

### §. 162.

Da die Zeiten der Beobachtungen gege-  
 ben sind, so findet man aus diesen Zeiten und  
 aus den geraden Aufsteigungen der Sterne die  
 Stundenwinkel  $t$  und  $t'$ , der erstere gehöre  
 zu dem gegen Süden, der andere zu dem ge-  
 gen Norden culminirenden Stern, ihre Ab-  
 wei-

weichungen seyen  $\delta$  und  $\delta'$ , so ist, wenn die gleichen Höhen  $h$  heißen:

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta' + \cos \varphi \cos \delta' \cos t'$$

$$\text{Also } 0 = \sin \varphi (\sin \delta' - \sin \delta) + \cos \varphi (\cos \delta' \cos t' - \cos \delta \cos t)$$

$$\text{und } \tan \varphi = \frac{\cos \delta \cos t - \cos \delta' \cos t'}{\sin \delta' - \sin \delta}$$

$$= \frac{\cos \delta \cos t \left( 1 - \frac{\cos \delta' \cos t'}{\cos \delta \cos t} \right)}{2 \cos \left( \frac{\delta' + \delta}{2} \right) \sin \left( \frac{\delta' - \delta}{2} \right)}$$

Man setze  $\frac{\cos \delta' \cos t'}{\cos \delta \cos t} = \cos N$ , so ist

$$1 - \frac{\cos \delta' \cos t'}{\cos \delta \cos t} = 2 \left( \sin \frac{1}{2} N \right)^2, \text{ folglich}$$

$$\tan \varphi = \frac{\cos \delta \cos t \left( \sin \frac{1}{2} N \right)^2}{\cos \left( \frac{\delta' + \delta}{2} \right) \sin \left( \frac{\delta' - \delta}{2} \right)}$$

Wenn die beyden Sterne in *demselben* Quadranten des Meridians genommen sind, so bleibt die Formel dieselbe. Allein kleine Fehler in den Abweichungen der Sterne würden sehr große in der Breite hervorbringen.

Wird der Stundenwinkel  $t'$  stumpf, oder ist der Stern näher bey seinem *untern* Durchgang durch den Mittagskreis als bey dem *obern*, so wird  $\cos t'$  negativ, und man hat

tang

$$\text{tang } \varphi = \frac{\cos \delta \cos t \left( 1 + \frac{\cos \delta' \cos t'}{\cos \delta \cos t} \right)}{2 \cos \left( \frac{\delta' + \delta}{2} \right) \sin \left( \frac{\delta' - \delta}{2} \right)}$$

Folglich, wenn man  $\frac{\cos \delta' \cos t'}{\cos \delta \cos t} = \cos N$  setzt

$$\text{tang } \varphi = \frac{\cos \delta \cos t (\cos \frac{1}{2} N)^2}{\cos \left( \frac{\delta' + \delta}{2} \right) \sin \left( \frac{\delta' - \delta}{2} \right)}$$

Die Stundenwinkel der Sterne kann man durch Beobachtung finden, wenn man von jedem gleiche Höhen auf beyden Seiten des Mittagskreises beobachtet, d. h. correspondirende Höhen nimmt.

Je näher man die Sterne bey dem Mittagskreis rechnen kann, desto sicherer kann man die Breite bestimmen.

### §. 163.

Wenn man auf diese Art die Breite gefunden hat, so kann man aus der Breite, Stundenwinkel und Abweichung die Höhe berechnen. Diese Höhe mit der, welche das Instrument angibt, verglichen, gibt den Fehler desselben \*). Die Formel (§. 111.)

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

kann zu dieser Absicht bequemer eingerichtet werden. Man setze statt  $\cos t$  den gleichen Werth  $1 - 2(\sin \frac{1}{2} t)^2$ , so wird

sin

\*) Eine Anwendung von dieser Methode machte H. Prof. *Beisler* in Mitau. Astr. Jahrb. für 1795. S. 147. u. f.

$\sin h = \cos(\varphi - \delta) - 2(\sin \frac{1}{2}t)^2 \cos \varphi \cos \delta$   
 und, wenn  $2(\sin \frac{1}{2}t)^2 \cos \varphi \cos \delta = \cos O$  gesetzt  
 wird,  $\sin h = \cos(\varphi - \delta) - \cos O$

$$= 2 \sin\left(\frac{O + \varphi - \delta}{2}\right) \sin\left(\frac{O - \varphi + \delta}{2}\right)$$

Oder

weil  $\sin h = \cos(90^\circ - h) = 1 - 2\left(\sin \frac{90^\circ - h}{2}\right)^2$

und  $\cos(\varphi - \delta) = 1 - 2\left(\sin \frac{\varphi - \delta}{2}\right)^2$

so ist

$$1 - 2\left(\sin \frac{90^\circ - h}{2}\right)^2 = 1 - 2\left(\sin \frac{\varphi - \delta}{2}\right)^2$$

$$- 2(\sin \frac{1}{2}t)^2 \cos \varphi \cos \delta$$

folglich  $\left(\sin \left(\frac{90^\circ - h}{2}\right)\right)^2 =$

$$\left(\sin \frac{\varphi - \delta}{2}\right)^2 + (2 \sin \frac{1}{2}t)^2 \cos \varphi \cos \delta$$

$$= \left(\sin \frac{\varphi - \delta}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{(\sin \frac{1}{2}t)^2 \cos \varphi \cos \delta}{\left(\sin \frac{\varphi - \delta}{2}\right)^2}\right)$$

Man setze  $\frac{\sin \frac{1}{2}t \sqrt{(\cos \varphi \cos \delta)}}{\sin \left(\frac{\varphi - \delta}{2}\right)} = \tan P$

so wird

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{90^\circ - h}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\varphi - \delta}{2}\right) \sqrt{1 + (\tan P)^2} \\ &= \sin\left(\frac{\varphi - \delta}{2}\right) \sec P \\ &= \frac{\sin\left(\frac{\varphi - \delta}{2}\right)}{\cos P}.\end{aligned}$$

*Aus drey Höhen eines Sterns und den Zwischenzeiten der Beobachtungen die Breite zu finden.*

§. 164.

Wenn man den zu einer Höhe gehörigen Stundenwinkel wüßte, so könnte man nach §. 160 die Breite finden. Es kommt also nur darauf an, einen Stundenwinkel aus den gegebenen Stücken zu finden. Man setze die Stundenwinkel  $= t, t', t''$ , die dazu gehörigen Höhen  $h, h', h''$ ;  $t - t'' = \Delta t$ ,  $t - t' = \Delta t'$ ,  $t' - t'' = \Delta t''$ , so ist (§. 111.)

$$\sin h'' = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t''$$

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

$$\text{also } \sin h'' - \sin h = \cos \varphi \cos \delta (\cos t'' - \cos t)$$

$$\text{ebenso } \sin h'' - \sin h' = \cos \varphi \cos \delta (\cos t'' - \cos t')$$

$$\begin{aligned}\text{folglich } \frac{\sin h'' - \sin h}{\sin h'' - \sin h'} &= \frac{\cos t'' - \cos t}{\cos t'' - \cos t'} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{t+t''}{2}\right) \sin\left(\frac{t-t''}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t'+t''}{2}\right) \sin\left(\frac{t'-t''}{2}\right)}\end{aligned}$$



$$= \frac{\sin\left(\frac{t+t''}{2}\right) \sin \frac{\Delta t}{2}}{\sin\left(\frac{t'+t''}{2}\right) \sin \frac{\Delta t''}{2}}$$

$$\text{aber } \frac{t'+t''}{2} = \frac{t+t''-\Delta t'}{2}$$

$$\text{und } \sin\left(\frac{t'+t''}{2}\right) = \sin\left(\frac{t+t''}{2}\right) \cos \frac{\Delta t'}{2} \\ - \cos\left(\frac{t+t''}{2}\right) \sin \frac{\Delta t'}{2}$$

$$\text{folglich } \frac{\sin h'' - \sin h}{\sin h'' - \sin h'} = \frac{\sin \frac{\Delta t}{2}}{\sin \frac{\Delta t'}{2}}$$

$$\frac{\left(\frac{\cos \Delta t'}{2} - \cotg\left(\frac{t+t''}{2}\right) \sin \frac{\Delta t'}{2}\right) \sin \frac{\Delta t''}{2}}{\sin \frac{\Delta t'}{2} \sin \frac{\Delta t''}{2} (\sin h'' - \sin h)}$$

und hieraus

$$\cotg\left(\frac{t+t''}{2}\right) = \cotg \frac{\Delta t'}{2} - \frac{\sin \frac{\Delta t}{2} (\sin h'' - \sin h')}{\sin \frac{\Delta t'}{2} \sin \frac{\Delta t''}{2} (\sin h'' - \sin h)}$$

oder

$$\text{tang}\left(\frac{t+t''}{2}\right) = \text{tang} \frac{\Delta t'}{2} - \frac{\sin \frac{\Delta t'}{2} \sin \frac{\Delta t''}{2} (\sin h'' - \sin h)}{\sin \frac{\Delta t}{2} (\sin h'' - \sin h')}$$

Vermittelst dieser Formel findet man  $\frac{t+t''}{2}$ ,

wird hievon  $\frac{t-t''}{2}$  oder  $\frac{1}{2}\Delta t$  abgezogen, so

hat man den Stundenwinkel  $t''$ , folglich auch die Uebrigen, weil ihre Unterschiede gegeben sind.

Sind die Zwischenzeiten der Beobachtungen gleich, und gehören sie zu einem Stundenwinkel  $=\Delta t$ , so hat man

$$\text{tang} \left( \frac{t+t''}{2} \right) = \text{tang} \frac{\Delta t}{2} = \frac{\sin \Delta t (\sin h'' - \sin h)}{\sin h'' - \sin h'}$$

Wenn man den Stundenwinkel und die Abweichung des Sterns kennt, so kann man die Breite daraus *directe* herleiten, wie in dem folgenden §. wird gezeigt werden.

*Aus dem Stundenwinkel, der Abweichung und Höhe eines Sterns die Breite zu finden.*

§. 165.

Die Gleichung §. 111. läßt sich so einrichten:

$$\sin h = \sin \delta (\sin \varphi + \cos \varphi \cotang \delta \cos t)$$

Man seze  $\cotg \delta \cos t = \cotang M$

$$\text{oder } \frac{\text{tang} \delta}{\cos t} = \text{tang} M, \text{ so wird}$$

sin

$$\begin{aligned}
 \sin h &= \sin \delta (\sin \varphi + \cos \varphi \cotang M) \\
 &= \frac{\sin \delta}{\sin M} (\sin \varphi \sin M + \cos \varphi \cos M) \\
 &= \frac{\sin \delta}{\sin M} \cos(\varphi - M)
 \end{aligned}$$

$$\text{also } \cos(\varphi - M) = \frac{\sin h \sin M}{\sin \delta} = \cos N$$

folglich ist die Breite  $= N + M$

Für südliche Abweichungen wird  $M$  negativ, da findet sich also

die Breite  $= N - M$

Wenn man *correspondirende* Höhen genommen hat, so geben diese die Zeit der Culmination des Sterns und die Stundenwinkel, welche zu jeder Höhe gehören, folglich die zu der Auflösung dieser Aufgabe erforderlichen Stücke.

*Beyspiel.* Nach §. 112. war die scheinbare gedoppelte Höhe des obern Sonnenrandes  $= 49^{\circ} 50' 0''$ , als die Sternuhr zeigte  $4^{\text{U.}} 1' 29'', 0$ . Im Mittag zeigte die Uhr  $0^{\text{U.}} 30' 44'', 4$  (§. 113.). Folglich sind von dem Augenblick des Mittags an bis zu dem Augenblick der Beobachtung verflossen  $4^{\text{St.}} 30' 44'', 6$  Zeit der Uhr. Die Uhr eilte der Sternzeit vor  $1,9$  Sec. in einem Sterntag, folglich ist der Stundenwinkel  $= 3^{\text{St.}} 30' 44'', 6 - 0'', 3 = 3^{\text{St.}} 30' 44'', 3$  Sternzeit. Nun machen  $24^{\text{St.}}$  Sternzeit  $24^{\text{St.}} - (3' 55'', 908)$  mittl. Zeit (§. 126.) folglich  $3^{\text{St.}} 30' 44'', 3$  Sternzeit  $3^{\text{St.}} 30' 44'', 3 - 34'', 5 = 3^{\text{St.}} 30' 9'', 8$  mittl. Zeit. D. 27. März ist die mittlere Zeit im wahren Mittag  $0^{\text{U.}} 5' 23'', 5$ . d. 28. M.  $0^{\text{U.}} 5' 5'', 0$ , also sind  $23^{\text{St.}} 59' 41'', 5$  mittlerer Zeit  $= 24$  St. wahrer Sonnen-

nenzeit, und  $3^{\text{st}} 30' 9'',8$  mittl. Z.  $= 3^{\text{st}} 30' 9'',8$   
 $+ 2'',7 = 3^{\text{st}} 30' 12'',5$  wahrer Zeit.

Die wahre Zeit der Beobachtung kann man  
 auch so berechnen. Die mittlere Zeit im  
 wahren Mittag für den Meridian von Göttingen  
 d. 27. März ist

$$\begin{array}{rcl} & = 0^{\text{u}} 5' 23'',3 & \\ \text{die Zeit der Uhr} & 0 30 44,4 & \text{im Mittag.} \\ \text{der Uhr Abweich. von} & & \\ \text{der mittl. Zeit} & = 0 25 21,1 & \\ \text{Acc. d. Uhr} & = + 34,8 & *) \end{array}$$

Abw. v. d. m. Zeit zur

$$\text{Zeit der Beob.} = 0 25 55,9$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Die Zeit der Beobachtung war} & 4^{\text{u}} 1' 29'',0 & \\ & - 25 55,9 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{mittlere Zeit der Beobachtung.} & 3 35 33,1 & \\ \text{Zeitgleichung} & - 5 20,6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \text{wahre Zeit der Beobachtung} & 3 30 12,5 & \\ - & - & \text{in Grade verw.} = 52^{\circ} 33' 7'',5 = t \end{array}$$

In dem Augenblick der Beobachtung war es in  
 Berlin  $3^{\text{u}} 30' 12'',5 + 13' 53'' = 3^{\text{u}} 44' 5'',5$  Nach-  
 mittag. Die Veränderung der Abweichung  
 der Sonne in dieser Zeit ist  $= \frac{3^{\text{st}} 44'}{24} \cdot (23' 25'')$

$$\begin{array}{rcl} & = 3' 39'' & \\ \text{Abw. } \odot \text{ im Mittag} & = 2 47 5 & \\ - & - & \text{für die Z. der Beob.} = 2 50 44 = \delta \end{array}$$

die

\*)  $34'',8 =$  Accel. der Sternzeit für mittl. Sonnenzeit, +  
 Acc. der Uhr für Sternzeit  $= 34'',5 + 0'',3$

die gedopp. Höhe d. $\odot$	$= 49^{\circ} 50' 0'',0$ (s. 123)
Error ind.	$+ 1 0,0$
	<hr/>
	$49 51 0,0$
Hälfte $=$	$24 55 30,0$
Refract.	$- 2 2,2$
	<hr/>
	$24 53 27,8$
Parall. $\odot$	$0 7,7$
	<hr/>
	$24 53 35,5$
Halbm. $\odot$	$- 16 4,0$
	<hr/>
wahre Höhe der $\odot$	$= 24 37 31,5 = h$

Lg sin tot $=$	$10,0000000$
Lg tang $\delta$ $=$	$8,6964016$
	<hr/>
	$18,6964016$
Lg cos $t$ $=$	$9,7839322$
	<hr/>
Lg tang $M$ $=$	$8,9124694$
$M$ $=$	$4^{\circ} 40' 24''$
Lg sin $M$ $=$	$8,9110224$
Lg sin $h$ $=$	$9,6198069$
C. Lg sin $\delta$ $=$	$1,3041342$
	<hr/>
Lg cos $N$ $=$	$9,8349635$
$N$ $=$	$46^{\circ} 51' 16''$
$M$ $=$	$4 40 24$
	<hr/>
Breite $=$	$51 31 40$

### §. 166.

Um zu untersuchen, welche Fehler in der Breite entstehen, wenn in der Messung der Höhe und in der Zeitbestimmung ein kleiner Fehler wäre begangen worden, differentiire man die Gleichung  $\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi$

$\cos \delta \cos t$ , indem man  $h, \varphi$ , und  $t$  als veränderlich betrachtet, so findet man

$$dh \cos h = d\varphi \cos \varphi \sin \delta - d\varphi \sin \varphi \cos \delta \cos t \\ - dt \sin t \cos \varphi \cos \delta$$

folglich ist

$$d\varphi = \frac{-dh \cos h}{\sin \varphi \cos \delta \cos t - \cos \varphi \sin \delta - dt \sin t \cos \varphi \cos \delta} \\ = \frac{\sin \varphi \cos \delta \cos t - \cos \varphi \sin \delta - dh \cos h}{\sin(\varphi - \delta) - 2(\sin \frac{1}{2}t)^2 \sin \varphi \cos \delta - dt \sin t \cos \varphi \cos \delta}$$

Beyder Brüche Nenner werden desto größer, und ihre Zähler desto kleiner, je kleiner  $t$  wird. Je näher also die Beobachtungen bey dem Mittag gemacht werden, desto sicherer kann man daraus die Breite herleiten, und die Beobachtungen in dem Mittagskreis selbst sind die vortheilhaftesten.

Wendet man die Formel auf das Beyspiel des 165. §. an, so erhält man

$$d\varphi = -2,44 dh - 1,09 dt.$$

Ein Fehler von 10 Sec. in der Höhe bringt also in der Breite schon einen Fehler von 24,4 Sec., und ein Fehler von 15 Sec. in dem Stundenwinkel oder von 1 Sec. in Zeit einen von 16,35 Sec. hervor.

Es hat aber diese Methode den Vorzug, daß man an einem Tag sehr viele Bestimmungen der Breite erhalten kann. Aus diesem Grunde empfiehlt sie auch H. von Zach in dem *astron. Jahrbuch* für 1794 S. 175. u. f. Ueber-

berdieß kann man hier die Zeiten abwarten, da die Sonne gewisse Höhen erreicht, also die Alhidade auf eine runde Zahl der Eintheilungen stellen, um bey dem Ablesen der Höhen keine Schätzung gebrauchen zu dürfen.

Am vortheilhaftesten würde es seyn, correspondirende Höhen zur Zeit der schnellsten Höhenänderung (§. 114.) und andere nahe bey dem Mittag zu nehmen. Erstere dienen zur Bestimmung der Stundenwinkel oder der wahren Zeit der Beobachtungen, letztere zur Bestimmung der Breite.

*Aus drey nahe an dem Mittag genommenen Höhen und aus den Zwischenzeiten der Beobachtungen die Breite zu finden.*

### §. 167.

Wenn die Höhen nicht über 10 Minuten von dem Mittag genommen sind, so sind die Unterschiede zwischen diesen Höhen und der Mittagshöhe sehr nahe den Quadraten der Stundenwinkel proportional (§. 133.). In diesem Fall könnte man sich also der Methode §. 158. bedienen, wenn die Breite nur bey nahe bekannt wäre, um die Höhenänderung in einer Minute vor oder nach Mittag ( $\Delta H$ ) berechnen zu können. Sind aber *drey* Höhen nahe an dem Mittag gemessen worden, so läßt sich auch diese aus den Beobachtungen selbst herleiten.

Es seyen die beobachteten Höhen  $h, h', h''$ , ihre Abstände vom Mittag  $n, n', n''$  Minuten,  
T 4
die

die Veränderung der Abweichung in einer Minute  $= \Delta \delta$ , die Höhenänderung für den Stundenwinkel von 1 Zeitminute  $= \Delta H$ , so ist  
I. Wenn alle drey Höhen vor dem Mittag genommen sind

$$\left. \begin{aligned} h &= H - \Delta H \cdot n \mp \Delta \delta \cdot n \\ h' &= H - \Delta H \cdot n' \mp \Delta \delta \cdot n' \\ h'' &= H - \Delta H \cdot n'' \mp \Delta \delta \cdot n'' \end{aligned} \right\} \text{§. 158.}$$

also  $h'' - h = \Delta H(n + n'')(n - n'') \pm (n - n'') \Delta \delta$   
 $h'' - h' = \Delta H(n' + n'')(n' - n'') \pm (n' - n'') \Delta \delta$

Dividirt man die erste Gleichung mit  $n - n''$ , die zweyte mit  $n' - n''$  und zieht diese von jener ab, so findet man

$$\frac{h'' - h}{n - n''} - \frac{h'' - h'}{n' - n''} = (n - n') \Delta H$$

also hat man

$$\Delta H = \frac{\frac{h'' - h}{n - n''} - \frac{h'' - h'}{n' - n''}}{n - n'}$$

Dieselbe Formel findet man, wenn alle drey Höhen nach dem Durchgang durch den Mittagkreis genommen sind.

II. Sind zwey Höhen auf derselben und eine auf der entgegengesetzten Seite des Meridians gemessen worden, so ist

$$\left. \begin{aligned} h &= H - \Delta H \cdot n \mp \Delta \delta \cdot n \\ h' &= H - \Delta H \cdot n' \mp \Delta \delta \cdot n' \\ h'' &= H - \Delta H \cdot n'' \pm \Delta \delta \cdot n'' \end{aligned} \right\} \text{folglich}$$

$$h'' - h = \Delta H(n + n'')(n - n'') \pm \Delta \delta(n + n'')$$

$$h'' - h' = \Delta H(n' + n'')(n' - n'') \pm \Delta \delta(n' + n'')$$

Hier sind die Zwischenzeiten der Beobachtungen  $n + n''$ , und  $n' + n''$  gegeben, man dividire also die erste Gleichung durch  $n + n''$ , die zwey-



zweyte durch  $n' + n''$  und ziehe sie von einander ab, so findet sich

$$\frac{h'' - h}{n + n''} - \frac{h'' - h'}{n' + n''} = (n - n') \Delta H, \text{ also}$$

$$\Delta H = \frac{\frac{h'' - h}{n + n''} - \frac{h'' - h'}{n' + n''}}{n - n'}$$

Auf diese Art findet man also  $\Delta H$ ; die Rechnung wird ganz nach §. 158. fortgesetzt,

*Beyspiel.* Nach §. 155. war um

$$23^{\text{u}}. 51' 38'' h = 34^{\circ} 54' 45'', 7$$

$$- 57 30 h' = 34 56 53, 2$$

$$0 \quad 1 \quad 0 h'' = 34 57 18, 2$$

Hier ist  $n - n'' = 9' 22'' = 9,366 \text{ Min.}$

$$n' - n'' = 3 30 = 3,500$$

$$n - n' = 5 52 = 5,866$$

$$h'' - h = 2 32,5 = 152,5 \text{ Sec.}$$

$$h'' - h' = 0 25,0 = 25,0 \text{ Sec.}$$

$$\text{Also } \Delta H = \frac{\frac{152,5}{9,366} - \frac{25,0}{3,5}}{5,866} = 1'', 55$$

Oben §. 156. wurde gefunden  $\Delta H = 1'', 487$ , also ist  $\Delta H$  aus den Beob. nur  $0'', 063$  zu gros. Nun hat man nach §. 158.

$$n + n'' = \frac{h'' - h}{n - n''} - \frac{\Delta \delta}{\Delta H}$$

$$= \frac{152,5}{1,55 \cdot 9,366} - \frac{0,981}{1,55}$$

$$= 10,504 - 0,633$$

$$= 9,871$$

$$n - n'' = \frac{9,871}{9,366}$$

$$\text{Untersch.} = 0,505 = 2 n''$$

$$n'' = 0,2525$$

Un-

Unterschied zwischen der größten Höhe und der Mittagshöhe

$$= (0,2525)^2 \cdot 1,55 = 0,1 \text{ Sec. folglich die Mittagshöhe} = 34^\circ 57' 18'',3$$

Da  $n'' = 0,2525$  und  $n' - n'' = 3,500$ , so ist  $n' = 3,500 + 0,252 = 3,752 \text{ Min.}$

Also ist der Unterschied zwischen der Höhe  $h'$  und der Mittagshöhe

$$= (3,752)^2 \cdot 1,55 = 21'',8$$

$$h' = 34^\circ 56' 53,2$$

$$\text{Mittagshöhe} = \begin{array}{r} 34 \\ 57 \\ 15,0 \end{array}$$

$$\text{Abw. d. } \odot = \begin{array}{r} 3 \\ 30 \\ 38,0 \end{array}$$

$$\text{Aequat. Höhe} = \begin{array}{r} 38 \\ 27 \\ 53,0 \end{array}$$

$$\text{Breite} = \begin{array}{r} 51 \\ 32 \\ 7,0 \end{array}$$

### §. 168.

Wenn man sich der bisher beschriebenen Methoden, die Breite zu bestimmen, bedient, die Beobachtungen nahe an dem Mittag vervielfältigt, und die Alhidade auf eine runde Zahl der Eintheilungen stellt, um keine Schätzung gebrauchen zu dürfen, so wird man vermittelst des Spiegelsextanten die Breiten genauer erhalten, als man von einem so kleinen Instrument erwarten sollte. So fand H. Prof. Seyffer mit dem 10 zölligen Sextanten von Troughton im Jahr 1794 folgende Breiten:

März.	22		51°	31'	56''		27		51°	31'	59''
	23		—	32	5		28		—	32	1
	25		—	32	5		29		—	32	2
	26		—	32	6		31		—	32	4

mit

mit dem oben beschriebenen 5 zolligen Sextanten:

Apr. 12	51° 32' 6"	Apr. 27	51° 32' 4"
13	— 32 4	Jun. 24	— 31 48
14	— 32 0	— 30	— 31 56
15	— 32 8	Jul. 5	— 32 4
17	— 32 9	— 7	— 32 0
18	— 32 5	— 12	— 32 0

Ich fand mit dem 10 zolligen Sextanten:

März. 2	51° 31' 55"	8	51° 32' 8"
3	— 32 7	9	— 32 7
4	— 32 7	10	— 32 5
5	— 32 8	11	— 32 4
6	— 32 59		

Den 19. April fand ich mit dem 5 zolligen Sextanten im Mittel aus 16 nicht über 10 Minuten vom Mittag entfernten Höhen die Breite = 51° 32' 5".

Bey diesen Beobachtungen wurde ein künstlicher Horizont mit Queksilber (§. 72.) gebraucht.

Die Höhen der Fixsterne lassen sich mit dem Sextanten nicht so genau nehmen als die Sonnenhöhen, theils weil ihr Licht durch die Zurückwerfung von dem künstlichen Horizont und von den Spiegeln des Sextanten zu sehr geschwächt wird, theils weil man die beyden Bilder nicht so scharf zur Bedekung bringen, als man das Berühren der Sonnenbilder beobachten kann. Aus diesem Grunde habe ich mich auch bey den Methoden, die Breite vermittelst des Spiegelsextanten zu bestimmen, auf Sonnenhöhen eingeschränkt.

Noch

## *Noch einige Methoden, die wahre Zeit einer Beobachtung zu bestimmen.*

### §. 169.

Wenn man die Breite als bekannt voraussetzt, so kann man aus der Höhe eines Sterns und aus seiner Abweichung den Stundenwinkel berechnen, und aus diesem mit der bekannten geraden Aufsteigung des Sterns die Sternzeit, mittlere und wahre Sonnenzeit finden. Hat man die Höhe der Sonne gemessen, so gibt der zu dieser Höhe gehörige Stundenwinkel in Zeit verwandelt ( $15^\circ$  auf eine Stunde gerechnet) die wahre Zeit der Beobachtung.

Der Stundenwinkel findet sich leicht aus der Gleichung §. 111.

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

wenn man die bekannten Gröſſen auf eine Seite des Gleichheitszeichens bringt, und mit  $\cos \varphi \cos \delta$  dividirt, und man findet

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$$

Weil sich aber diese Formel nicht genau durch Logarithmen berechnen läßt, so seze man statt  $\cos t$  den gleichgültigen Werth

$1 - 2(\sin \frac{1}{2}t)^2$ , alsdann wird

$$\sin h = \cos(\varphi - \delta) - 2(\sin \frac{1}{2}t)^2 \cos \varphi \cos \delta$$

folglich

$$\begin{aligned} 2(\sin \frac{1}{2}t)^2 \cos \varphi \cos \delta &= \sin h - \cos(\varphi - \delta) \\ &= \sin h - \sin(90^\circ - \varphi + \delta) \\ &= 2 \cos \frac{(h + 90^\circ - \varphi + \delta)}{2} \sin \frac{(h - 90^\circ + \varphi - \delta)}{2} \end{aligned}$$

Statt

Statt der Abweichung  $\delta$  bringe man die Polardistanz  $D$  in die Gleichung, und setze  $\delta = 90^\circ - D$ , so kommt

$$(\sin \frac{1}{2}t)^2 \cos \varphi \sin D = \sin \frac{(\varphi + D - h)}{2} \cos \frac{(\varphi + D + h)}{2}$$

Man setze die Summe der *Breite*, *Polardistanz* und *Höhe*  $= S$ , so findet sich

$$(\sin \frac{1}{2}t)^2 = \frac{\cos \frac{1}{2}S \sin (\frac{1}{2}S - h)}{\cos \varphi \sin D}.$$

Die Zeit, da man die Höhen nehmen muß, um die Zeit am sichersten zu bestimmen, ist begreiflich diejenige, da sich die Höhe am schnellsten ändert (§. 114.).

Wenn man aus einer Sonnenhöhe die wahre Zeit finden will, so muß man die Abweichung der Sonne für den Augenblick der Beobachtung haben, und also die wahre Zeit schon wenigstens bis auf eine halbe Minute genau wissen. So genau könnte man mit der Abweichung der Sonne für den nächsten Mittag durch eine vorläufige Rechnung schon die wahre Zeit der Beobachtung finden.

*Beyspiel.* Den 27. März 1794 war nach §. 112. die gedoppelte Höhe des obern Sonnenrandes  $= 49^\circ 50' 0''$ , als die Uhr zeigte 4<sup>St.</sup> 1' 29", 0 nachmitt. Die wahre Höhe der Sonne war also  $= 24^\circ 37' 31'', 5 = h$ . Die Abweichung der Sonne  $= 2^\circ 50' 44''$  nördlich, also ihre Polardistanz  $= 87^\circ 9' 16'' = D$ . Die Breite ist  $= 51^\circ 31' 54'' = \varphi$ . Nun wird die Rechnung auf folgende Art geführt:

$$h =$$

$$\begin{aligned}
h &= 24^{\circ} 37' 31'',5 \\
\phi &= 51 \ 31 \ 54,0 \text{ C.Lg cos} = 0,2061524 \\
D &= 87 \ 9 \ 16,0 \text{ C.Lg sin} = 0,0005358 \\
S &= 163 \ 18 \ 41,5 \\
\frac{1}{2}S &= 81 \ 39 \ 20,7 \text{ Lg cos} = 9,1617284 \\
\frac{1}{2}S - h &= 57 \ 1 \ 49,2 \text{ Lg sin} = 9,9237406 \\
\text{Summe} &= \text{Lg}(\sin \frac{1}{2}t)^2 = 19,2921572 \\
\frac{1}{2} \text{ Summe} &= \text{Lg sin } \frac{1}{2}t = 9,6460786 \\
\frac{1}{2}t &= 26^{\circ} 16' 27'',4 \\
t &= 52 \ 32 \ 54,8 \\
\text{Stundenwinkel in Zeit} &= 3^{\text{St.}} 30' 11'',7 \text{ wahre Zeit} \\
&\quad \quad \quad \underline{4 \ 1 \ 29,0} \text{ Zeit der Uhr}
\end{aligned}$$

Abweichung der Uhr  
von der wahren Zeit } = 0 31 17,3

Die Beobachtung wurde also gemacht um  $3^{\text{U.}} 30' 11'',7$  wahrer Zeit nachmitt. Wäre die Voreilung der Uhr für wahre Sonnenzeit vom 27. bis 28. März bekannt, so könnte man aus dieser Beobachtung die Zeit der Uhr im wahren Mittag herleiten. Da die Uhr der Sternzeit täglich  $1'',9$  voreilte, so läßt sich jene Voreilung berechnen.

D. 27. März war die mittlere Zeit im wahren Mittag

$$= 0^{\text{U.}} 5' 23'',5$$

$$\text{d. 28. März} = 0 \ 5 \ 5,0$$

$$\text{also } 24^{\text{St.}} \text{ wahre Zeit} = 23 \ 59 \ 41,5 \text{ mittl. Zeit.}$$

Nun sind 24 mittl. Sonnenstunden

$$\text{also} = 24^{\text{St.}} 3' 56'',55 \text{ Sternz.}$$

$$\left. \begin{array}{l} 23^{\text{St.}} 59' 41'',5 \text{ mittl. Zeit} \\ 24 \ 0 \ 0,0 \text{ wah. Zeit} \end{array} \right\} = 24 \ 3 \ 38,0 \text{ Sternz.}$$

und, weil die Uhr der Sternzeit in einem Tag  $1'',9$  voreilte

$24^{\text{St.}} 0' 0''$  wahrer Zeit  $= 24^{\text{St.}} 3' 39'',9$  Zeit der Uhr.

Die Uhr eilte also in 24 St. wahrer Zeit der Sonne vor  $3' 39'',9$ , folglich in  $3^{\text{St.}} 30' 11'',7$  wahrer Zeit  $32'',07$ . Daher war ihre Abweichung von der wahren Zeit d. 27. März im Mittag  $= 31' 17'',3 - 32'',07 = 30' 45'',23$ , folglich die Zeit der Uhr im wahren Mittag  $= 0^{\text{U.}} 30' 45'',23$ , nur  $0'',8$  mehr als §. 13.

Auf diese Art kann man also eine Uhr durch einzelne Höhen, wenn die Witterung, oder andere Umstände keine correspondirende Höhen verstatten, berichtigen. Um die Zeit genauer zu erhalten, müssen mehrere Höhen genommen werden, aus welchen man die wahren Zeiten der Beobachtungen berechnet. Diese mit den Zeiten der Uhr verglichen geben der Uhr Abweichung von der wahren Zeit, und man nimmt aus den verschiedenen Resultaten ein Mittel.

### §. 170.

Nach §. 169. ist

$$\sin h = \cos(\varphi - \delta) - 2(\sin \frac{1}{2}t)^2 \cos \varphi \cos \delta$$

$$\text{also } 2(\sin \frac{1}{2}t)^2 = \frac{\cos(\varphi - \delta) - \sin h}{\cos \varphi \cos \delta}$$

Man kann also den Stundenwinkel auch auf folgende Art mittelst der *Douwesischen* Tafeln berechnen:

Von dem  $\cos(\varphi - \delta)$  oder dem Sinus der Mittagshöhe ziehe man den Sinus der beobachteten Höhe ab, zu dem Logarithmen dieses Unterschieds addire man die Summe der arithmeti-

metischen Complementary von  $\text{Lg} \cos \varphi$  und  $\text{Lg} \cos \delta$ , so hat man den  $\text{Log. } 2(\sin \frac{1}{2} t)^2$  oder den *Log. rising* §. 161., welcher in den Tafeln aufgesucht den Stundenwinkel in Zeit gibt.

Für obiges Beyspiel ist

$$\varphi = 51^{\circ} 31' 54'' \text{ C. Lg} \cos = 0,2061524$$

$$\delta = 2^{\circ} 50' 44'' \text{ C. Lg} \cos = 0,0005358$$

$$\varphi - \delta = 48^{\circ} 41' 10'' \quad \text{Summe} = 0,2066882 = \text{Lg. ratio.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos(\varphi - \delta) = 66018 \\ \sin h = 41668 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{für den Halbmesser} \\ 100\,000 \end{array}$$

$$\text{Unterschied} = 24350 \quad \text{Lg} = 4,3864990$$

$$\text{Lg. rising} = 4,5931872$$

gehört zu  $3^{\text{St.}} 30' 11'',7$

Vermittelst der gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln könnte man den Stundenwinkel nach dieser Formel auch so finden. Man suche die zu dem  $\text{Log } 2(\sin \frac{1}{2} t)^2$  gehörige Zahl auf, so ist diese der Sinus versus des Stundenwinkels, welcher von dem Halbmesser abgezogen den cosinus des Stundenwinkels gibt.

In dem hier gegebenen Beyspiel gehört zu dem Logarithme 4,5931872 die Zahl 39191,08 =  $\sin. \text{vers. } t$  für den Halbmesser 100000, also ist der  $\cos t = 60808,92$  welcher in den Tafeln aufgesucht  $t = 52^{\circ} 32' 55''$  gibt.

### §. 171.

Eine andere Methode, die Zeit durch einzelne Höhen zu bestimmen, hat H. von Zach im astron. Jahrbuch für 1789 S. 160 vorge schlagen. Man berechnet für einen gewissen Stun-



Stundenwinkel die Höhe der Sonne, reducirt diese wahre Höhe auf die scheinbare, stellt den Winkelmesser auf die voraus berechnete Höhe, und wartet die Zeit ab, da die Sonne diese Höhe erreicht, so gibt diese Zeit mit dem in Zeit verwandelten Stundenwinkel, für welchen man die Höhe berechnete, der Uhr Abweichung von der wahren Zeit. Die Berechnung der Höhe kann nach einer der §. 163. gegebenen Formeln geführt werden, oder nach folgenden Formeln:

Man setze  $\cos t \cotang \varphi = \tan M$ , so ist

$$\sin h = \frac{\sin \varphi}{\cos M} \sin(M + \delta)$$

Denn es ist §. 111.

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t \\ &= \sin \varphi (\sin \delta + \cotg \varphi \cos t \cos \delta) \\ &= \sin \varphi (\sin \delta + \tan M \cos \delta) \\ &= \frac{\sin \varphi}{\cos M} (\sin \delta \cos M + \cos \delta \sin M) \\ &= \frac{\sin \varphi}{\cos M} \sin(M + \delta) \end{aligned}$$

Für eine gegebene Breite kann man die zu verschiedenen Stundenwinkeln gehörigen

Werthe von  $M$  und  $\frac{\sin \varphi}{\cos M}$  in eine Tafel

bringen, dergleichen Herr Prof. *Bode* in die *Ephemeriden* für 1778 S. 177 u. f. und den I. *Supplement-Band* zu den *astronomischen Jahrbüchern* S. 78 u. f. für die Breite von Berlin eingerückt hat. Was hier  $M$  heißt ist dort

$$AE, \text{ und } \frac{\sin \varphi}{\cos M} = \sin SHR, \delta = ES.$$

U

Für

Für südliche Abweichung wird

$$\sin h = \frac{\sin \varphi}{\cos M} \sin(M - \delta)$$

*Beispiel.* Es seye der Stundenwinkel

$$= 52^{\circ} 32' 55'', 2 = t$$

$$\text{die Breite} = 51 \ 31 \ 54,0 = \varphi$$

$$\text{die Abweichung} = 2 \ 50 \ 44,0 = \delta$$

$$\text{Lg cost} = 9,7839660$$

$$\text{Lg cotg } \varphi = 9,9001124$$

$$\text{Lg Tg } M = 9,6840784$$

$$M = 25^{\circ} 47' 14'', 4$$

$$\text{Lg sin } \varphi = 9,8937352$$

$$\text{C. Lg cos } M = 0,0455573$$

$$\text{Lg sin } (M + \delta) = 9,6805129$$

$$\text{Lg sin } h = 9,6198054$$

$$h = 24^{\circ} 37' 31'', 5$$

$$\text{Halbm. } \odot \quad + \ 16 \ 4,0$$

$$\hline 24 \ 53 \ 35,5$$

$$\text{Par. } \odot \quad - \ 0 \ 7,7$$

$$\hline 24 \ 53 \ 27,8$$

$$\text{Refract.} \quad + \ 2 \ 2,2$$

$$\hline$$

Scheinb. Höhe

$$\text{des obern Randes} = 24 \ 55 \ 30,0$$

$$\text{gedopp. Höhe} = 49 \ 51 \ 0,0$$

$$\text{Error ind.} \quad - \ 1 \ 0,0$$

$$\hline 49 \ 50 \ 0,0$$

Nun wurde den 27. März (§. 112.) unter der hier vorausgesetzten Breite und Abweichung der Sonne die gedoppelte Höhe des obern Sonnenrandes gefunden  $= 49^{\circ} 50'$  folglich

lich war der Stundenwinkel  $= 52^{\circ} 32' 55'', 2$  und die wahre Zeit der Beobachtung  $3^h 30' 17'', 7$ .

### §. 172.

Ob man gleich durch mehrere einzelne Höhen, wenn die Breite bekannt ist, die Zeit genau bestimmen und sich durch ihre Uebereinstimmung von der Genauigkeit der Beobachtungen versichern kann, so zieht man doch die correspondirende Höhen den einzelnen vor, theils weil bey einzelnen Höhen ein kleiner Fehler in der Breite den Stundenwinkel merklich ändert, theils weil die Rechnung beschwehrlich ist.

Wenn die Witterung es nicht erlaubt, correspondirende Höhen zu nehmen, sondern so wie man sie finden kann, so kann man doch nach der Methode des Herrn Obrist von *Tempelhof* \*) die Zeit des Durchgangs durch den Mittagskreis eben so genau, als durch correspondirende Höhen, bestimmen.

Zu einer gewissen Zeit  $T$  seye die Höhe der Sonne  $= h$ , ihre Abweichung  $= \delta$ , die Breite  $= \varphi$ , der Stundenwinkel  $= t$ . Zu einer andern Zeit,  $T'$ , die Höhe  $= h'$ , Abweichung  $= \delta'$ , der Stundenwinkel  $= t'$ , so ist nach der bekannten Gleichung (§. 111.)

$$\text{I. } \cos t = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$$

$$\text{II. } \cos t' = \frac{\sin h' - \sin \varphi \sin \delta'}{\cos \varphi \cos \delta'}$$

U 2

Die

\*) I. Supplement - Band zu den Berl. astronomischen Jahrbuchern S. 214. u. f.

Die beyden Gleichungen multiplicire man mit  $\cos \varphi \cos \delta \cos \delta'$ , und ziehe die zweyte von der ersten ab, so hat man

$$\cos \varphi \cos \delta \cos \delta' (\cos t - \cos t') = \sin h \cos \delta' - \sin h' \cos \delta + \sin \varphi (\sin \delta' \cos \delta - \cos \delta' \sin \delta)$$

Es ist aber

$$\sin h \cos \delta' - \sin h' \cos \delta = \sin h \cos \delta - \sin h' \cos \delta - \sin h (\cos \delta - \cos \delta') = \cos \delta (\sin h - \sin h')$$

$$= 2 \sin h \sin \left( \frac{\delta' + \delta}{2} \right) \sin \left( \frac{\delta' - \delta}{2} \right); \text{ ferner}$$

$$\sin h - \sin h' = 2 \cos \left( \frac{h + h'}{2} \right) \sin \left( \frac{h - h'}{2} \right),$$

und

$$\cos t - \cos t' = 2 \sin \left( \frac{t' + t}{2} \right) \sin \left( \frac{t' - t}{2} \right)$$

folglich

$$\begin{aligned} & 2 \cos \varphi \cos \delta \cos \delta' \sin \left( \frac{t' + t}{2} \right) \sin \left( \frac{t' - t}{2} \right) \\ &= 2 \sin \left( \frac{h - h'}{2} \right) \cos \left( \frac{h + h'}{2} \right) \cos \delta \\ &= 2 \sin h \sin \left( \frac{\delta' + \delta}{2} \right) \sin \left( \frac{\delta' - \delta}{2} \right) \\ &\quad + \sin \varphi \sin (\delta' - \delta) \end{aligned}$$

Da nun die Veränderung der Abweichung der Sonne in einem Tag noch nicht 24 Min. beträgt, so kann man, ohne einen Fehler von 0'',02 im Bogen, setzen,  $\sin (\delta' - \delta) = \delta' - \delta$ , und

$$\text{um so viel mehr } \sin \left( \frac{\delta' - \delta}{2} \right) = \frac{\delta' - \delta}{2},$$

also wird

$$\begin{aligned}
& 2 \cos \varphi \cos \delta \cos \delta' \sin \left( \frac{t' + t}{2} \right) \sin \left( \frac{t' - t}{2} \right) \\
& = 2 \sin \left( \frac{h - h'}{2} \right) \cos \left( \frac{h + h'}{2} \right) \cos \delta \\
& + (\delta' - \delta) \left( \sin \varphi - \sin h \sin \left( \frac{\delta' + \delta}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

Ist nun die eine Höhe vor, die andere nach der Culmination genommen worden, so ist die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen  $\frac{T' - T}{2}$  in Grade verwandelt = der halben

$$\text{Summe der Stundenwinkel} = \frac{t' + t}{2}$$

Also findet man

$$\begin{aligned}
\sin \left( \frac{t' - t}{2} \right) &= \frac{\sin \left( \frac{h - h'}{2} \right) \cos \left( \frac{h + h'}{2} \right)}{\sin \left( \frac{t + t'}{2} \right) \cos \varphi \cos \delta'} \\
&+ \frac{\left( \frac{\delta' - \delta}{2} \right) \left( \sin \varphi - \sin h \sin \left( \frac{\delta' + \delta}{2} \right) \right)}{\cos \varphi \cos \delta \cos \delta' \sin \left( \frac{t + t'}{2} \right)} \quad \left. \vphantom{\frac{\sin \left( \frac{h - h'}{2} \right) \cos \left( \frac{h + h'}{2} \right)}{\sin \left( \frac{t + t'}{2} \right) \cos \varphi \cos \delta'}} \right\} \begin{array}{l} * \text{ in} \\ \text{in calc} \end{array}
\end{aligned}$$

Der Bogen  $\frac{t' - t}{2}$  in Zeit verwandelt und von der

halben Zwischenzeit der Beobachtungen  $\frac{T' - T}{2}$

abgezogen gibt den zu der vormittägigen Höhe gehörigen Stundenwinkel in Zeit, welcher zu der Zeit ,T, addirt, die Zeit der Uhr im wahren Mittag gibt.

nen Fixstern ist  $\delta' = \delta$ , also das zwey-  
 1. Glied der GröÙe rechter Hand des Gleich-  
 heitszeichens  $= 0$ .

Sind die Höhen nicht über zwey bis drey  
 Grade verschieden, so kann man ohne be-  
 trächtlichen Fehler setzen

$$\begin{aligned} \frac{t' - t}{2} = & \frac{\left(\frac{h - h'}{2}\right) \cos\left(\frac{h + h'}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t + t'}{2}\right) \cos \varphi \cos \delta'} \\ & + \frac{\left(\frac{\delta' - \delta}{2}\right) \operatorname{tang} \varphi}{\cos \delta \cos \delta' \sin\left(\frac{t + t'}{2}\right)} \\ & - \frac{\left(\frac{\delta' - \delta}{2}\right) \sin h \sin\left(\frac{\delta' + \delta}{2}\right)}{\cos \varphi \cos \delta \cos \delta' \sin\left(\frac{t + t'}{2}\right)} \end{aligned}$$

Die Formel ist für den Fall eingerichtet,  
 wenn die nachmittägliche Höhe kleiner ist als die  
 vormittägliche; im entgegengesetzten Fall wird  
 $\frac{h - h'}{2}$ ,  $\frac{t' - t}{2}$  negativ, und der zur vormit-

täglichen Höhe gehörige Stundenwinkel ist  
 $= \frac{t + t'}{2} + \frac{t' - t}{2}$ . Man sieht aus dieser

Formel, daß die Abweichung, Breite und die  
*absoluten* Höhen nicht sehr scharf bekannt  
 seyn dürfen, nur muß die Veränderung der  
 Abweichung in der Zwischenzeit der Beobach-  
 tun-

tungen und der Unterschied der Höhen genau bekannt seyn. Aus diesem Grunde hat diese Methode große Vorzüge vor der Methode der einzelnen Höhen, und sie kann selbst alsdann sehr nützlich seyn, wenn man correspondirende Höhen bekommen hat, und die Beobachtungen auf verschiedene Arten mit einander verbindet, um die Zeit des Mittags genauer zu erhalten. Die Rechnung kann auch nicht sehr beschwerlich seyn, weil man die zu den Bogen  $\varphi, \delta, \delta', \frac{\delta' + \delta}{2}, \frac{h + h'}{2}$  und  $\frac{t + t'}{2}$

gehörigen trigonometrischen Linien nur für Minuten suchen darf.

Um diese Formel durch ein Beyspiel zu erläutern, wähle ich von den §. 112. angeführten Höhen folgende:

47° 0' um 20<sup>h</sup> 50' 20" Vormitt. (T.)

49 50 um 4 1 29 Nachmitt. (T')

Die wahren Höhen sind  $h = 23^\circ 12' 23'',3$

$$h' = 24 \ 37 \ 31,5$$

$$h - h' = - \ 1 \ 25 \ 8,2$$

$$\frac{h - h'}{2} = - \ 0 \ 42 \ 34,1 = 2554'',1$$

Abweichung der  $\odot = 2^\circ 44' \ 3'',3 = \delta$

$$2 \ 50 \ 44,0 = \delta'$$

$$\frac{\delta' - \delta}{2} = 200'',3$$

$$\frac{h + h'}{2} = 23^\circ 55', \quad \frac{\delta' + \delta}{2} = 2^\circ 47'$$

$\frac{T' - T}{2} = 3^{\text{st}} 35' 34'',5$ . Hätte die Uhr von einer Culmination bis zu der nächstfolgenden 24 Stunden gezeigt, so wäre die halbe Zwischenzeit der Beobachtungen in Grade verwandelt,  $15^{\circ}$  auf eine Stunde gerechnet,  $= \frac{t + t'}{2}$ . Da aber die Uhr in 24 wahren Sonnenstunden  $24^{\text{st}} 3' 39'',9$  zeigte (§. 169.) so muß man vorher jene Zwischenzeit in wahre Sonnenzeit verwandeln durch die Proportion:  $24^{\text{st}} 3' 39'',9 : 3^{\text{st}} 35' 34'',5 = 24 : x$ , oder den zu der Zwischenzeit  $\frac{T' - T}{2}$  gehörigen Bogen

durch die Proportion suchen:

$$\left. \begin{array}{l} 24^{\text{st}} 3' 39'',9 : 3^{\text{st}} 35' 34'',5 \\ *) 86619,9 : 12934,5 \end{array} \right\} = 360^{\circ} : \frac{t + t'}{2}$$

$$\text{Nun ist } \text{Lg } 360 = 2,5563025$$

$$\text{Lg } 12934,5 = 4,1117497$$

$$\text{Lg } 86619,9 = 4,9376178$$

$$\text{Lg } \frac{t + t'}{2} = 1,7304344$$

$$\frac{t + t'}{2} = 53,757 \text{ Gr. } 53^{\circ} 45' 25''$$

Um die Formel bequemer berechnen zu können, bringt man ihre drey Glieder unter einerley Nenner, alsdann ist

$$t - t'$$

\*) Diese Verwandlung der Stunden und Minuten in Sekunden geschieht leicht vermittelst der Tafel in H. Hofrath Kästners astron. Abhandlungen. II. Sammlung S. 82.



$$\frac{t'-t}{2} = \frac{\left(\frac{h-h'}{2}\right) \cos\left(\frac{h+h'}{2}\right) \cos \delta}{\sin\left(\frac{t+t'}{2}\right) \cos \varphi \cos \delta \cos \delta'} + \frac{\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right) \sin \varphi}{\sin\left(\frac{t+t'}{2}\right) \cos \varphi \cos \delta \cos \delta'} - \frac{\left(\frac{\delta'-\delta}{2}\right) \sin h \sin\left(\frac{\delta'+\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t+t'}{2}\right) \cos \varphi \cos \delta \cos \delta'}.$$

Nun ist

$$\text{Lg} \sin\left(\frac{t+t'}{2}\right) = 9,9066131$$

$$\text{Lg} \cos \varphi = 9,7938317$$

$$\text{Lg} \cos \delta = 9,9995054$$

$$\text{Lg} \cos \delta' = 9,9994642$$

$$\text{Summe} = \underline{39,6994144}$$

$$\text{C. arithm.} = 0,3005856$$

$$\text{Lg} \frac{h-h'}{2} = 3,4072379$$

$$\text{Lg} \cos\left(\frac{h+h'}{2}\right) = 9,9610108 - 10$$

$$\text{Lg} \cos \delta = \underline{9,9995054 - 10}$$

$$3,6683397$$

gehört zu 4659",5

$$\text{Lg} \left( \frac{\delta' - \delta}{2} \right) = 2,3016809$$

$$\text{Lg} \sin \varphi = 9,8937452 - 10$$

$$\text{C. arith.} = 0,3005856$$

$$\hline 2,4960117$$

gehört zu 313",3

$$\text{Lg} \left( \frac{\delta' - \delta}{2} \right) = 2,3016809$$

$$\text{Lg} \sin h = 9,5955452 - 10$$

$$\text{Lg} \sin \left( \frac{\delta' + \delta}{2} \right) = 8,6862718 - 10$$

$$\text{C. arith.} = 0,3005856$$

$$\hline 0,8840835$$

gehört zu 7",6

Weil nun  $\frac{h - h'}{2}$  negativ ist, so ist

$$\frac{t' - t}{2} = -4659",5 + 313",3 - 7",6 = -4353",8$$

$$= -\frac{4353,8}{15} \text{ oder } -290,25 \text{ Sec. in Zeit.}$$

Da aber nach §. 169. 24 wahre Sonnenstunden 24<sup>st</sup> 3' 39",9 der Uhr gleich waren, so sind 290",25 wahrer Zeit = 290",25 + 0",74 = 4' 50",99 Zeit der Uhr.

$$\text{Nun war } \left. \begin{aligned} \frac{t + t'}{2} &= 3^{\text{st}} 35' 34",50 \\ \frac{t' - t}{2} &= -0 \quad 4 \quad 50,99 \end{aligned} \right\} \text{ in Zeit}$$

$$\hline 3 \quad 40 \quad 25,49$$

Zeit der Beob. 20 50 20,00

Zeit der Uhr im

Mittag 0 30 45,49

Be-

## *Bestimmung der Länge eines Orts auf der Oberfläche der Erde.*

### §. 173.

Die Länge eines Orts läßt sich am leichtesten durch Beobachtung derjenigen Himmelsbegebenheiten, die sich *wirklich* ereignen, dergleichen die *Verfinsterungen des Monds und der Trabanten des Jupiters* sind, bestimmen (§. 9. S. 9.). Wären diese Erscheinungen von der Art, daß man genau den Augenblick, da sie sich ereignen, angeben könnte, so würden sie das bequemste und zugleich das sicherste Mittel seyn, die Länge zu bestimmen. Allein der Schatten der Erde auf dem Mond ist nicht scharf begränzt, so daß man weder den Anfang und das Ende der Mondsfinsternisse, noch den Ein- und Austritt der Mondsflecken mit der hier erforderlichen Genauigkeit angeben kann, wenigstens viele Uebung dazu erfordert wird. Die Verfinsterungen der Jupiterstrabanten, welche *Hell* zur Längenbestimmung besonders empfohlen hat, gewähren ebenfalls nur alsdenn einige Genauigkeit, wenn man viele Beobachtungen so mit einander verbindet, daß die von der Verschiedenheit der Fernröhren und der Augen herrührenden Fehler einander aufheben. Die übrigen §. 9. angeführten Erscheinungen, mit welchen erst noch eine Reduction muß vorgenommen werden, besonders die *Bedeckungen der Fixsterne vom Mond*, verstatten eine

eine größere Genauigkeit. Da man aber bey der Berechnung derselben die Länge schon beynahe kennen muß, so sind erstere Erscheinungen immer zu der vorläufigen Längenbestimmung nützlich, und dienen zur Abkürzung einer sonst etwas beschwerlichen Berechnung der letztern.

*Bestimmung der Länge durch Mondsfinsternisse.*

§. 174.

Man beobachtet den Anfang und das Ende der Finsterniß, bey totalen Finsternissen noch Anfang und Ende der totalen Verfinsternung, und die Ein- und Austritte der kenntlichsten Mondsfleken in und aus dem Schatten der Erde \*), welche gewöhnlich in den astronomischen Jahrbüchern angekündigt werden. Um die Fleken nicht mit einander zu verwechseln, muß man eine genaue Mondscharte gebrauchen. Herr von Zach zeigte mir eine zu dieser Absicht sehr bequem eingerichtete Charte, die auf Pappe mit einer kreisförmigen Oefnung von der Gröfse der Mondscharte aufgeleimt, und mit Oehl durchsichtig gemacht war. Hinter diese Charte wird beym Ge-

\*) *Hell* schlug zu diesen Beobachtungen nur etwa 20 mal vergrößernde Fernröhren vor. Herr von Zach aber fand, daß man huer mit Vorthail stärkere Vergrößerungen achromatischer Fernröhren und Spiegelteleskope gebrauchen könne, welches auch die schöne Uebereinstimmung seiner Beobachtungen mit andern, die mit ähnlichen Instrumenten angestellt worden, beweist.

Gebrauch ein Licht gesetzt, welches die *Charte* erleuchtet; und ihr ein dem vollen Monde ähnliches Ansehen gibt; zugleich ist der Beobachter gegen das Blenden des Lichts gesichert. Die Augenblicke der Beobachtungen bemerkt man an der Uhr, welche man berichtigt, um die Zeit der Beobachtungen in wahrer, mittlerer oder Sternzeit angeben zu können.

Hat man nun an einem andern Ort Beobachtungen derselben Erscheinungen, so findet man aus der Vergleichung ihrer Zeiten den *Mittagsunterschied*, und folglich auch den Unterschied der Längen beyder Oerter (§. 7.).

Weil der Mondschatten nicht scharf begrenzt ist, so muß man sich eine gewisse Gränze desselben wählen, an welcher man immer die Ein- und Austritte der Fleken bemerkt. Sind die Fleken groß, so kann man die Ein- und Austritte ihrer Ränder und ihrer Mittelpuncte, die man nach dem Augenmas bestimmt, beobachten. Hat sich der andere Beobachter einer Fernröhre, welche von der des erstern verschieden ist, bedient, so wird er die Ein- und Austritte früher oder später gesehen haben, als der erstere. Nimmt man aber aus den Mittagsunterschieden, welche so wohl aus den Eintrittten, als auch aus den Austritten hergeleitet wurden, ein Mittel, so heben sich diese Fehler gegen einander auf.

*Beyspiel.* Bey der totalen Mondsfinsterniß den 22. October 1790 wurden in *Paris* von H. *Mechain*, und in *Gotha* von H. von *Zach*

Zach folgende correspondirende Beobachtungen gemacht \*). Die Zeit ist *wahre Zeit*.

	Paris.	Gotha.
vermunt. Anfang	n <sup>u</sup> . 6' 33"	n <sup>u</sup> . 41' 19"
Anf. gewils	— 7 33	— 41 44
Grimald. I. Rand	— 9 28	— 44 3
Aristarch	— 23 36	— 57 37
Copernic. I. R.	— 29 58	12 3 21
— II. R.	— 32 13	— 6 3
Tycho	— 30 33	— 4 5
totale Verfinst.	12 14 25	— 48 4
Anf. d. Austr.	13 55 23	14 28 36
Grim. ganz	— 58 46	— 32 17
Kepler halb	14 8 23	— 42 7
Cop. I. R.	— 16 23	— 49 9
— II. R.	— 18 48	— 52 23
Plato I. R.	— 19 33	— — —
— II. R.	— 20 48	— — —
Tycho II. R.	— 24 3	— 57 34
M. seren. I. R.	— 32 3	15 4 47
— — II. R.	— 43 18	— 17 1

In *Gotha* wurde also der Anfang der Mondsfinsternis beobachtet um

n<sup>u</sup>. 41' 44"

in *Paris* um 11 7 33

Mittagsuntersch. 10 34 11

Da man nun in *Gotha* bey dem Anfang der Mondsfinsternis mehr zählte als in *Paris*, so gieng die Sonne durch den Mittagskreis von *Gotha*, *früher*, als durch den Mittagskreis von *Paris*. Folglich liegt *Gotha* von *Paris* gegen *Morgen*. Bey dem Aus-

\*) *Astron. Jahrbuch für 1794 S. 91. und 170.*

Austritt des Plato wurde in Gotha nur die Zeit beobachtet, da er halb ausgetreten war,  $14^u, 53' 46''$ . Da aber in Paris die beyden Ränder des Plato beobachtet wurden, so findet man die Zeit, da er halb ausgetreten war, wenn man aus beyden Beobachtungen das Mittel nimmt, und bekommt auf diese Art eine correspondirende Beobachtung.

Plato. I. Rand  $14^u, 19' 33''$

— II. R. —  $20' 48''$

Plato halb  $14' 20' 10,5$  in Paris

— —  $14' 53' 46,0$  in Gotha

Mittagsuntersch.  $0' 33' 35,5$

Auf diese Art finden sich folgende Mittagsunterschiede:

	Aus den Eintr.	Aus den Austritten
	$34' 46''$	$33' 13''$
	$34' 11''$	$33' 31''$
	$34' 35''$	$33' 44''$
	$34' 1''$	$33' 36''$
	$33' 23''$	$33' 35''$
	$33' 50''$	$33' 35''$
	$33' 32''$	$33' 31''$
	$33' 39''$	$32' 44''$
Eint. Mittel	$33' 59,6$	$33' 43''$
Austr. —	$33' 32,8$	$33' 32,8$
Mittel aus beyden	$33' 46,2$	

Hier weichen die drey ersten Beobachtungen am meisten von den übrigen ab, welche gut unter einander stimmen. Werden sie als unsicher ausgeschlossen, so ist das Mittel aus den Eintritten

$$\begin{array}{r} 33' 41'',0 \\ \text{Aus den Austr. } 33' 32,8 \end{array}$$

$$\text{Mittel} = 33' 36,9 \text{ *)}$$

Dieser Mittagsunterschied in Grade verwandelt gibt

$$\begin{array}{r} 8^\circ 24' 13'',5 \\ \text{Länge von Paris} = 20 \quad 0 \quad 0,0 \quad (\S. \text{ i. S. 2.}) \\ \text{Länge von Gotha} = 28 \quad 24 \quad 13,5 \end{array}$$

*Bestimmung der Länge durch Verfinsterungen der Jupiterstrabanten.*

#### §. 175.

Um aus den Beobachtungen der Finsternisse der Jupiterstrabanten den Mittagsunterschied der Oerter genau zu bestimmen, müssen so wohl Eintritte als Austritte der Trabanten an den beyden Oertern, deren Mittagsunterschied man bestimmen will, beobachtet werden. Sucht man nun aus den Eintrittten und Austritten besonders den Mittagsunterschied, und nimmt aus beyden Bestimmungen ein Mittel, so heben sich die von der Verschiedenheit der Fernröhren und der Augen herrührende Fehler gegen einander auf, wie oben bey den Mondsfinsternissen gezeigt wurde. *Hell* zog diese Methode, die Länge zu bestimmen allen andern vor \*), wenn man auf die von ihm gezeigte Art aus den Beob-

ach-

\*) Dieser Mittagsunterschied ist nur  $8'',2$  größer, als der, welchen *H. von Zach* im Mittel aus vielen Bestimmungen gefunden hat. *Tabulae motuum Solis*. p. 12.

\*\*) *Ephemerides astronomicae anni 1764* pag. 189.



achtungen den Mittagsunterschied herleite. Die Bedingungen, welche seine Methode erfordert, und in einem Zeitraum von *fünf* oder *sechs Jahren* erhalten werden können, sind folgende:

- I. Man gebrauche nur die Beobachtungen des I. und II. Trabanten.
- II. Diese Beobachtungen, nimmt man an, seyen beständig mit derselben Fernröhre gemacht.
- III. Solche correspondirende Beobachtungen des ersten und zweyten Trabanten werden wenigstens dreyßig oder vierzig erfordert, die an jedem Ort bey günstigem Himmel gemacht sind.
- IV. Eben so viele Eintritte als Austritte.
- V. Man mache eine Auswahl derjenigen Beobachtungen, welche von den Beobachtern selbst als *gut* angegeben werden, schliesse aber diejenigen gänzlich aus, welche drey oder vier Tage vor oder nach der Opposition des Jupiters beobachtet wurden, außer wenn sie mit den übrigen übereinstimmen, denn bey diesen kann, nicht wegen der verschiedenen Güte der Fernröhren, sondern wegen der Nähe des Trabanten bey der hellen Scheibe des Jupiters, ein Fehler von zwey Minuten begangen werden. Ebenso müssen diejenigen nicht leicht gebraucht werden, welche sich zu einer Zeit ereignen, da der Jupiter in dem Knoten der Bahnen seiner Trabanten und zugleich einer derselben sich

so nahe bey einem andern befindet, daß man sie nicht leicht von einander unterscheiden kann. Auch müssen diejenigen sorgfältig ausgeschlossen werden, welche bey zu geringen Höhen des Jupiters oder in zu starker Dämmerung gemacht wurden.

VI. Endlich wird angenommen, die Beobachtungen seyen von geübten Beobachtern gemacht, und genau auf wahre Zeit reducirt.

Zu den Beobachtungen der Verfinsterungen der Jupiterstrabanten werden wenigstens 10 füßige gemeine oder diesen gleichkommende achromatische Fernröhren oder Spiegeltelescope erfordert.

*Beyspiel.* *Hell* beobachtete in Wien den Eintritt des ersten Trabanten 1757 März 21  
 $12^{\text{U.}} 55' 25''$

*Weifs* in Tyrnau um  $13 \quad 0 \quad 14$

Mittagsuntersch. =  $4 \quad 49$

Im Jahr 1762 Dec. 21. Austritt des I. Trabanten

*Hell* in Wien  $11^{\text{U.}} 35' 51''$

*Weifs* in Tyrnau  $11 \quad 40 \quad 32$

Mittagsunterschied  $4 \quad 41$

oben aus d. Eintr.  $4 \quad 49$

Summe  $9 \quad 30$

Mittel  $4 \quad 45$

Folglich liegt Tyrnau von Wien  $4' 45''$  in Zeit gegen Morgen.

Der

Der halbe Unterschied zwischen den beyden Bestimmungen  $= 4''$  ist der Unterschied der Fernröhren.

Die Austritte der Trabanten erfordern eine besondere Aufmerksamkeit, um den ersten Augenblick ihrer Wiedererscheinung zu bemerken. In dem Augenblick, da man den ersten Blick vermuthet, fängt man an, die Secunden zu zählen, und verläßt die Fernröhre nicht früher, als bis man sich von dem wirklichen Austritt des Trabanten versichert hat, Die Beobachtung läßt sich leichter machen, wenn man den Ort bestimmt hat, wo der Trabant wieder erscheinen muß, welches vermittelt eines *Jovilabiums* \*) geschehen kann. *Hell* hat in dieser Absicht die Lage der Trabanten gegen den Jupiter für die Zeit der in Wien sichtbaren Verfinsterungen derselben in seinen Ephemeriden angegeben.

### *Bestimmung der Länge aus Beobachtungen der Sonnenfinsternisse.*

#### §. 176.

Genauer, als durch Mondsfinsternisse und Verfinsterungen der Jupiterstrabanten, kann die Länge aus den Beobachtungen der Sonnenfinsternisse hergeleitet werden, weil man den Augenblick des Anfangs und besonders des  
Endes

\*) Weidleri explicatio Jovilabii Cassiniani. La Lande Astronomie. Bode Erläuterung der Sternkunde, I. Th. §. 498.

Endes derselben sehr genau beobachten kann, wenn man sich stark vergrößernder Fernrohren bedient. Es erhellet zwar aus der Natur der Sache, daß man den Anfang einer Sonnenfinsterniß, oder den Augenblick, da die Ränder des Monds und der Sonne einander berühren, immer zu spät angeben wird, weil man nur alsdann den Anfang der Sonnenfinsterniß angeben kann, wenn der Mond schon einen merklichen Eingrif in die Sonnenscheibe gemacht hat. Allein der Unterschied zwischen dem Augenblick, da die beyden Ränder einander berühren, und dem, da man den Anfang der Finsterniß bemerkte, wird immer sehr klein seyn, wenn man sich starker Vergrößerungen bedient, und bey weitem mit der Ungewißheit, welche bey Beobachtung der Mondfinsternisse und der Verfinsterungen der Jupiterstrabanten statt findet, in keine Vergleichung kommen. *La Lande* gibt die Vorschrift, bey der Berechnung der Sonnenfinsternisse die Summe der Halbmesser für die Beobachtung des Anfangs um 2" zu vermindern \*), gibt aber nicht die Vergrößerung der Fernröhre, welche man bey der Beobachtung gebraucht, an, von welcher doch diese Grösse abhängt. *Hell* hielt die Sonnenfinsternisse und die Bedekungen der Fixsterne vom Mond deswegen für unsicher zur Längenbestimmung, weil diese Beobachtungen auf den Mittelpunct der Erde reducirt werden müssen, und die zu dieser Rechnung erforderlichen Ele-

\*) Astronomie Tom. II. 1789.

Elemente, die Parallaxe des Monds, seine scheinbare Breite, die Gestalt der Erde, der Halbmesser der Sonne und des Monds, aus den astronomischen Tafeln genommen werden, deren Unrichtigkeit allerdings einen merklichen Einfluß auf die Resultate der Rechnungen haben kann. Allein *Lexell* \*) zeigte, wie man nicht allein den Einfluß, welchen die Unrichtigkeit der Elemente, die in der Rechnung als genau bekannt vorausgesetzt werden, und folglich auch die Zuverlässigkeit der aus den Beobachtungen hergeleiteten Schlüsse bestimmen, sondern auch den Fehler der Elemente der Rechnung durch Verbindung der Beobachtungen mit einander finden könne. Sind also gleich die Sonnenfinsternisse weit seltener, als die Finsternisse der Jupiterstrabanten, so kann man doch aus genauen Beobachtungen einer Sonnenfinsterniß die Länge eines Orts wenigstens so genau bestimmen, als aus einer großen Anzahl der Verfinsterungen der Jupiterstrabanten, wobey, wie *Hell* selbst bemerkt, noch eine Ungewißheit von 10 Sec. statt finden kann, die sich bey Sonnenfinsternissen selten findet.

### §. 177.

Bey der Beobachtung der Sonnenfinsterniß gebraucht man gefärbte Gläser, welche man vor dem Ocular anbringt. Ich habe gewöhn-

\*) N. Commentarii academiae scientiarum imperialis petropolitanae. T. XV.

wöhnliches reines und eben geschliffenes Glas, das ich an einer Lampe schwarz anlaufen liefs, sehr bequem gefunden. Um diese geschwärzten Gläser dauerhafter zu machen, kann man dem geschwärzten Glas eine Einfassung von Papier geben, welche verhindert, daß ein zweytes darauf gelegtes ähnliches Stük Glas die geschwärzte Seite berührt. Die beyden Gläser werden nun mit Sigellak zusammengeküttet. Nimmt man ein länglichtes Stük Glas, so kann man das eine Ende stärker schwärzen als das andere, welches man gebrauchen kann, wenn das Sonnenlicht durch Dünste oder dünne Wolken geschwächt ist.

Es ist gut, wenn man den Anfang der Finsterniß durch *Rechnung* oder durch *Construction* vorher bestimmt, um nicht die Augen vor der Beobachtung durch Aufpassen auf den Anfang der Finsterniß zu schwächen. Die bequemste Methode, die Umstände einer Sonnenfinsterniß zu berechnen, scheint mir die *Mayersche* zu seyn. (*Tobiae Mayeri opera inedita. Vol. I. pag. 25. sq. F. E. Bode Erläuterung der Sternkunde. II. Th. S. 603. §. 661. u. f.*) Eine sehr vollständige Anleitung zur Berechnung der Sonnenfinsternisse findet man in G. C. Reccards *Abhandlung von der grossen Sonnenfinsterniß d. 1. April 1764.* Anleitungen zur Bestimmung der Umstände einer Sonnenfinsterniß durch *Zeichnung* findet man ebenfalls in der hier angeführten Schrift, in *Lamberts Beyträgen zum Gebrauch der Mathematik, II. Th. II. Abth.*

Abth. so wie in den meisten astronomischen Lehrbüchern.

Statt der *Mayerschen* Formeln für die Parallaxen, kann man auch die unten vorkommende gebrauchen. Man berechnet für verschiedene Zeitpunkte die wahre Länge und Breite des  $\text{D}$ , seine Horizontalparallaxe und Durchmesser, die wahre Länge der Sonne, ferner die Längen- und Breitenparallaxen, vermittelt welcher man die scheinbare Mondsweite, den Unterschied der scheinbaren Längen, und daraus den Abstand der Mittelpunkte findet. Nun sucht man durch Interpolation die Zeit, da der Abstand der Mittelpunkte der Summe der Halbmesser des Mondes und der Sonne gleich ist, welches die Zeit des Anfangs und des Endes gibt.

### §. 178.

Der Mond ist der Erde so nahe, daß er von einem Punct ihrer Oberfläche aus gesehen an einer andern Stelle erscheint, als man ihn aus dem Mittelpunkt der Erde sehen würde, und aus demselben Grunde erscheint er auch zweyen Beobachtern auf der Oberfläche der Erde in demselben Augenblick an verschiedenen Stellen des Himmels. Daher kömmt es, daß zwey Beobachter an verschiedenen Oertern der Erde den Anfang einer Sonnenfinsterniß nicht in *einem Augenblick* sehen, weil diese nicht eine wirkliche Verdunkelung der Sonne ist, sondern von dem zwischen der Sonne und dem Ort des Beobachters auf der Erde befindlichen Mond herrührt, der die zu dem



dem Beobachter kommenden Sonnenstralen zum Theil oder ganz auffängt. Die Beobachtungen der Sonnenfinsternisse können also nicht gerade zu, wie Mondsfinsternisse, zur Bestimmung des Mittagsunterschieds gebraucht werden. Aus den Beobachtungen des Anfangs und des Endes kennt man die *scheinbare* Entfernung der Mittelpuncte der Sonne und des Monds von einander, welche der Summe ihrer Halbmesser gleich ist. Zieht man durch den Mittelpunct des Monds einen größten Kreis senkrecht auf die Ebene der Ecliptic, so entsteht ein rechtwinklichtes sphärisches Dreyek  $\odot \Delta B$  Fig. 53. Taf. VI., in welchem  $\odot \Delta$  die scheinbare Entfernung der Mittelpuncte,  $\odot B$  ein Theil der Ecliptic,  $B \Delta$  die scheinbare Breite des Monds ist. In diesem Dreyek ist die Hypotenuse  $\odot \Delta$  gegeben; wäre die scheinbare Breite des Monds  $B \Delta$  bekannt; so könnte man die Seite  $\odot B$  finden. Diese drückt den Unterschied der scheinbaren Längen des Monds und der Sonne aus. Wäre nun noch der Unterschied zwischen der *wahren* Länge des Monds (wie sie aus dem Mittelpunct der Erde erscheint) und zwischen der scheinbaren (wie sie der Beobachter auf der Oberfläche der Erde siehet), gegeben, so könnte man aus dem Unterschied der scheinbaren und wahren Länge des Monds und der Sonne und aus dem Unterschied zwischen der wahren und scheinbaren Länge des Monds (der *Längenparallaxe*) den Unterschied zwischen der *wahren* Länge des Monds und der Sonne in dem Augenblick, da man den Anfang oder  
das



das Ende der Finsterniß beobachtete, finden. Ist endlich die Veränderung der Länge des Monds und der Sonne in einer gegebenen Zeit, z. B. in einer Stunde, bekannt, so kennt man die Geschwindigkeit von beyden. Da sich so wohl die Sonne als der Mond von Abend gegen Morgen bewegen, so kennt man auch die Richtung ihrer Bewegung. Aus dieser, aus ihrer Geschwindigkeit und aus ihrem Abstand von einander, könnte man also den Augenblick bestimmen, da die Sonne und der Mond von dem Mittelpunkt der Erde aus gesehen einerley Länge hatten, das ist, die Zeit der wahren Zusammenkunft des Monds mit der Sonne oder des *Neumonds* \*). Verfährt man ebenso mit der correspondirenden an dem andern Ort gemachten Beobachtung, so findet man auch aus dieser die Zeit des Neumonds. Da nun der absolute Augenblick dieser Erscheinung nicht vom dem Ort des Beobachters auf der Oberfläche der Erde abhängt, indem sich die Mittelpuncte der Sonne, der Erde und des Monds nur in einer auf die Ebene der Ecliptic senkrechten Ebene befinden dürfen, so ist der Unterschied der Zeiten, zu welchen der wahre Neumond nach dem Meridian eines jeden Orts eintraf, der Mittagsunterschied der beyden Oerter.

§. 179.

\*) Weil bey der Sonne ebenfalls eine Parallaxe statt findet, so muß auch diese in Rechnung gebracht werden, indem man statt der Mondsparallaxe allein den Unterschied zwischen den Parallaxen des Monds und der Sonne nimmt.

## §. 179.

Um den Unterschied zwischen der wahren und scheinbaren Länge des Monds angeben zu können, muß der Ort des Beobachters auf der Erde gegeben seyn. Den wahren Ort des Monds findet man aus den Tafeln in Beziehung auf die Ecliptic. Gedenkt man sich die von dem Mittelpunkt der Erde an den Ort des Beobachters gezogene gerade Linie bis an die scheinbare Himmelskugel verlängert, so wird dieser Punct eine gewisse Länge und Breite haben. Der Aequator der Himmelskugel fällt mit dem Aequator der Erde zusammen, folglich ist der Winkel, welchen jener Halbmesser der Erde mit der Ebene des Aequators macht, die aus dem Mittelpunkt der Erde gesehene *Abweichung* des Orts des Beobachters. Nun dreht sich die Erde um ihre Axe nach derselben Richtung, nach welcher die jährliche scheinbare Bewegung der Sonne geschieht, folglich ist die *gerade Aufsteigung* des Puncts, wo der verlängerte Halbmesser der Erde an dem Ort des Beobachters die Himmelskugel trifft = der geraden Aufsteigung der Sonne + dem Winkel, welchen die durch den Mittelpunkt der Sonne und durch jenen Punct auf der Oberfläche der Erde gezogene Stundenkreise mit einander machen. Dieser Winkel ist = der wahren Zeit der Beobachtung in Grade verwandelt, wenn man  $15^\circ$  auf eine Stunde rechnet, weil die Erde 24 wahre Sonnenstunden gebraucht, um sich in Beziehung auf die Sonne einmal um ihre Axe zu drehen. Folglich ist die *geocentrische gerade Aufsteigung*

gung des Orts der Erde so groß, als die Summe der wahren Zeit der Beobachtung in Grade verwandelt und der wahren geraden Aufsteigung der Sonne. Da die Zeitgleichung dem Unterschied zwischen der wahren und mittlern geraden Aufsteigung der Sonne in Zeit verwandelt gleich ist, so ist die gerade Aufsteigung jenes Puncts auch gleich der Summe der *mittlern* Zeit in Grade verwandelt und der *mittlern* geraden Aufsteigung der Sonne. Leztere ist der mittlern Länge der Sonne gleich, weil so wohl die Länge der Sonne als auch ihre gerade Aufsteigung einen gemeinschaftlichen Anfangspunct und Endpunct ( $0^\circ \gamma$ ) haben, und die *mittlern* Bewegungen immer der Zeit proportional gesetzt werden, folglich ist die gerade Aufsteigung des Orts des Beobachters auf der Erde, welche gewöhnlich die *gerade Aufsteigung des Mittagskreises* oder *die Mitte des Himmels* (*Ascensio recta medii coeli*) heißt, für einen gegebenen Augenblick, gleich *der Summe der in Grade verwandelten mittlern Zeit desselben und der mittlern Länge der Sonne*, oder der in Grade verwandelten *Sternzeit* ( $15^\circ$  auf 1 St.).

### §. 180.

Wäre die Erde eine vollkommene Kugel, so wäre der Winkel, welchen die aus ihrem Mittelpunkt an den Ort des Beobachters gezogene gerade Linie mit der Ebene des Aequators macht, der Breite des Orts gleich (§. 1.), weil in diesem Fall die Verticallinie mit jenem Halbmesser der Kugel zusammenfällt. Allein

sowohl physikalischen Gründen als auch wirklichen Messungen zu Folge ist die Erde ein gegen die Pole zusammengedrücktes Sphäroid, das durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleinere Axe entsteht, wenn man annimmt, die Erde seye anfänglich eine flüssige Kugel gewesen, deren Theile durch die Schwere unter sich zusammenhiengen, wie *Huygens*, *Newton*, *Clairaut* u. a., gezeigt haben, letzterer auch für den Fall, wenn die Erde aus Schichten von verschiedener Dichtigkeit bestünde. Die Messungen geben verschiedene Axenverhältnisse, und lassen die Frage, ob die Erde wirklich ein *elliptisches* Sphäroid seye, unentschieden. Indessen kann man doch das Elliptische Sphäroid als eine der wahren Gestalt der Erde nahe kommende Figur betrachten. Der Punct, wo der Durchmesser des Aequators, und die Erdaxe einander schneiden, heißt der Mittelpunct der Erde.

### §. 181.

Gedenkt man sich die Erde durch eine Ebene geschnitten, welche durch ihre beyden Pole geht, so ist der Schnitt eine Ellipse *ADB* Fig. 54, Taf. VI, deren kleinere halbe Axe *CD* der halben Erdaxe, und deren größere halbe Axe *AC* dem Halbmesser des Aequators der Erde gleich ist. *AMD* ist also ein Quadrant eines Meridians, und eine an einen Punct *M* desselben gezogene Tangente *MT* der Durchschnitt einer Ebene, welche die Oberfläche in dem Punct *M* berührt, mit der Ebene

Ebene des Mittagskreises durch  $M$ . Zieht man die Linie  $MN$  auf  $MT$  senkrecht oder eine *Normallinie* an den Punct  $M$ , so ist  $MN$  die Richtung der Schwere an dem Ort  $M$ , folglich  $ANM =$  der Breite des Orts  $M$ , wie man sie aus astronomischen Beobachtungen findet. Mit dem Halbmesser  $CD$  beschreibe man in die Ellipse einen Kreis  $EmDF$ , und fälle aus dem Punct  $M$  ein Perpendikel  $MP$  auf die kleine Axe  $CD$ , welches der Kreis  $EmDF$  in dem Punct  $m$  schneidet. Zieht man an diesen Punct eine Tangente  $mT$ , so liegt nach den bekannten Eigenschaften der Ellipse der Durchschnittspunct der Tangenten  $MT$  und  $mT$  in der verlängerten kleinen Axe  $CDT$ . Man ziehe aus dem Mittelpunct  $C$  die geraden Linien  $CM, Cm$ , so ist  $CM$  der Halbmesser der Erde für den Ort  $M$ ,  $ACM$  der Winkel, welchen dieser Halbmesser mit der Ebene des Aequators macht, oder die *verbesserte Breite* des Orts  $M$ . Nun ist  $MTP = PMN$  oder  $= ANM$ , welche beyde Winkel den Winkel  $PMT$  zu einem rechten ergänzen, und aus demselben Grunde  $mTP = PmC = ACm$ . Ferner verhält sich

$$(I.) \text{ tang } mTP : \text{ tang } MTP = CD : AC$$

$$(II.) \text{ tang } PMC : \left( \frac{\text{tang } mTP}{\text{tang } PmC} \right) = CD : AC$$

---


$$\text{folglich } \text{tang } PMC : \text{ tang } MTP = (CD)^2 : (AC)^2$$

$$\text{oder } \text{tang } ACM : \text{ tang } ANM = (CD)^2 : (AC)^2$$

Heißt nun die beobachtete Breite  $ANM, \varphi$ , die verbesserte  $ACM$  oder geocentrische  $\varphi'$ , das Axenverhältniß  $CD : AC = n : m$ , so hat man

tang

$$\operatorname{tang} \phi' = \frac{n^2}{m^2} \operatorname{tang} \phi.$$

§. 182.

Da man nun die geocentrische gerade Aufsteigung (§. 179.) und die Abweichung  $ACM$  ( $\phi'$ ) des Orts  $M$  kennt, so wird nur noch der Halbmesser der Erde für den Ort  $M$ , nemlich  $CM$  erfordert, um seine Lage gegen den Mittelpunkt der Erde zu bestimmen. Dieser wird auf folgende Art können gefunden werden. In dem Dreyek  $MCm$  verhält sich

$$Cm : CM = \sin PMC : \sin PmC$$

$$\text{oder } CD : CM = \sin ACM : \sin ACm$$

Aus I und II §. 181. folgt

$$\operatorname{tang} mTP : \operatorname{tang} MTP = \operatorname{tang} PMC : \operatorname{tang} mTP$$

$$\text{also ist } (\operatorname{tang} mTP)^2 = \operatorname{tang} MTP \cdot \operatorname{tang} PMC$$

$$\text{oder } (\operatorname{tang} ACm)^2 = \operatorname{tang} ANM \cdot \operatorname{tang} ACM$$

folglich

$$(\sin ACm)^2 \cos ACM \cos ANM = (\cos ACm)^2 \sin ANM \sin ACM$$

$$\text{und } (\sin ACm)^2 \cos (ANM - ACM) = \sin ACM \sin ANM$$

also verhält sich

$$(\sin ACM)^2 : (\sin ACm)^2 = \sin ACM \cos (ANM - ACM) : \sin ANM$$

$$\text{aber } (\sin ACM)^2 : (\sin ACm)^2 = (CD)^2 : (CM)^2$$

daher

$$(CD)^2 : (CM)^2 = \sin ACM \cos (ANM - ACM) : \sin ANM$$

$$= \sin \phi' \cos (\phi - \phi') : \sin \phi$$

$$\text{folglich ist } CM = CD \cdot \sqrt{\frac{\sin \phi}{\sin \phi' \cos (\phi - \phi')}})$$

$$\text{oder, weil } (CD)^2 = (AC)^2 \frac{\operatorname{tang} \phi'}{\operatorname{tang} \phi} \quad (\S. 181.)$$

$$CM = AC \sqrt{\frac{\cos \phi}{\cos \phi' \cos (\phi - \phi')}}.$$

§. 183.

## §. 183.

Der Unterschied zwischen der wahren und verbesserten Breite, oder der Winkel  $MCm$  läßt sich auch auf folgende Art durch eine Reihe ausdrücken. Es ist

$$\text{tang } \varphi' = \frac{n^2}{m^2} \text{ tang } \varphi \quad (\S. 181.)$$

$$\text{also } \varphi - \varphi' = \varphi - \text{Arc. tang } \frac{n^2}{m^2} \text{ tang } \varphi$$

folglich

$$d.(\varphi - \varphi') = d\varphi - \frac{\frac{n^2}{m^2} d\varphi}{\cos \varphi^2 \left(1 + \frac{n^4}{m^4} \text{tg } \varphi^2\right)}$$

Setzt man  $\frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} = a$ , so wird

$$d.(\varphi - \varphi') = \frac{2a d\varphi (a + \cos 2\varphi)}{1 + a(a + 2\cos 2\varphi)} \cdot \frac{a + \cos 2\varphi}{a + \cos 2\varphi}$$

Löst man den Bruch  $\frac{a + \cos 2\varphi}{1 + a(a + 2\cos 2\varphi)}$  in eine Reihe auf, so findet er sich  $= \cos 2\varphi - a \cos 4\varphi + a^2 \cos 6\varphi - \text{etc.}$

also ist

$$d.(\varphi - \varphi') = 2a d\varphi \cos 2\varphi - 2a^2 d\varphi \cos 4\varphi + 2a^3 d\varphi \cos 6\varphi - \text{etc.}$$

und wenn man integrit

$$\varphi - \varphi' = a \sin 2\varphi - \frac{1}{2}a^2 \sin 4\varphi + \frac{1}{3}a^3 \sin 6\varphi - \text{etc.}$$

Diese Formel drückt den Winkel, welchen die Verticallinie mit dem Halbmesser an einem gegebenen Ort  $M$  macht in Theilen des Halbmessers aus. Um ihn in Secunden zu haben, muß man ihn mit der Anzahl von Secunden, welche der Halbmesser enthält, (206265) multipliciren. Nach



Nach *Newton* ist  $m=230, n=229$ , also  

$$e = \frac{(230)^2 - (229)^2}{(230)^2 + (229)^2} = \frac{459}{105341}$$
 dieses gibt in

Secunden ausgedrückt  $\frac{459.206265}{105341}$  oder 898,75

Sec. wie man leicht vermittelt der Logarithmen findet. Auf dieselbige Art findet man die übrigen Coefficienten, und man hat für die Abplattung der Erde  $\frac{1}{230}$

$$\phi - \phi' = 898'',75 \sin 2\phi - 1'',958 \sin 4\phi.$$

Der Coefficient des dritten Glieds ist schon kleiner als 0'',006.

#### §. 184.

Ebenso kann auch der Halbmesser der Erde  $CM$  durch eine sehr schnell convergirende Reihe ausgedrückt werden. Man hat

$$(PM)^2 = (CM \sin PCM)^2 = (CM \cos \phi')^2$$

$$(CP)^2 = (CM \cos PCM)^2 = (CM \sin \phi')^2$$

Nach den Eigenschaften der Ellipse ist

$$(PM)^2 = \left( \frac{AC}{CD} \right)^2 \cdot ((CD)^2 - (CP)^2)$$

folglich ist

$$(CM \cos \phi')^2 = (AC)^2 - \left( \frac{AC}{CD} \right)^2 \cdot (CM \sin \phi')^2$$

oder wenn  $\frac{CM}{AC} = e$  und  $\frac{AC}{CD} = \frac{m}{n}$  gesetzt

$$\text{wird, } e^2 = \frac{n^2}{m^2 - (m^2 - n^2)(\cos \phi')^2}$$

Es ist aber  $\tan \phi' = \frac{n^2}{m^2} \tan \phi$  (§. 181.)

folg-



folglich  $(\cos \varphi')^2 = \frac{m^4}{m^4 - n^4 (\text{tang } \varphi)^2}$

daher  $\xi^2 = \frac{m^4 (\cos \varphi)^2 + n^4 (\sin \varphi)^2}{m^2 (m^2 (\cos \varphi)^2 + n^2 (\sin \varphi)^2)}$   
 $= \frac{1 - \frac{m^4 - n^4}{m^4} (\sin \varphi)^2}{1 - \frac{m^2 - n^2}{m^2} (\sin \varphi)^2}$

und

$$\xi = \left(1 - \frac{m^4 - n^4}{m^4} (\sin \varphi)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{m^2 - n^2}{m^2} (\sin \varphi)^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Man setze  $\frac{m^4 - n^4}{m^4} = \alpha$   
 $\frac{m^2 - n^2}{m^2} = \beta$

und drücke die Wurzelgrößen durch Reihen aus, so findet sich, wenn man beyde mit einander multiplicirt.

$$\begin{aligned} \xi &= 1 - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)(\sin \varphi)^2 \\ &\quad - \frac{1}{8}(\alpha^2 + 2\alpha\beta - 3\beta^2)(\sin \varphi)^4 \\ &\quad - \frac{1}{16}(\alpha^3 + \alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - 5\beta^3)(\sin \varphi)^6 \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{m^2 - n^2}{m^2} \right) \frac{n^2}{m^2} (\sin \varphi)^2 \\ &\quad - \frac{1}{8} \left( \frac{m^2 - n^2}{m^2} \right)^2 \frac{n^2}{m^2} \left( 4 + \frac{n^2}{m^2} \right) (\sin \varphi)^4 \\ &\quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Für das Newtonsche Axenverhältniß wird

$$\xi = 1 - 0,0043007 (\sin \varphi)^2 - 0,0000466 (\sin \varphi)^4$$

Der Coefficient des dritten Glieds ist kleiner als 0,0000004, welches man weglassen kann, weil man, wie unten wird gezeigt werden, den Werth von  $\rho$  nur bis auf fünf Decimalstellen zu wissen nöthig hat.

Der Coefficient  $\frac{1}{2} \left( \frac{m^2 - n^2}{m^2} \right) \frac{n^2}{m^2}$  ist auch

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{m+n}{m} \cdot \frac{m-n}{m} \cdot \frac{n^2}{m^2},$$

und  $\frac{m+n}{m}$  sehr nahe = 2,  $\frac{n^2}{m^2}$  auch nur

wenig von der Einheit verschieden, also ist

$$\text{beynahe } \frac{1}{2} \left( \frac{m^2 - n^2}{m^2} \right) \frac{n^2}{m^2} = \frac{m-n}{m} =$$

$$1 - \frac{n}{m}. \quad \text{Es ist aber } \frac{n}{m} = \text{der halben Erd-}$$

axe, wenn der Halbmesser des Aequators

$$= 1 \text{ gesetzt wird, folglich } 1 - \frac{n}{m} \text{ beyder}$$

Unterschied. Dieser =  $\alpha$  gesetzt und die übrigen Glieder der obigen Reihe weggelassen gibt folgende Formel

$$\rho = 1 - \alpha (\sin \phi)^2 \quad *)$$

welche den Werth von  $\rho$  ebenfalls sehr nahe gibt, weil hier der Coefficient von  $\sin \phi^2$  etwas zu groß ist, und dadurch der Fehler, welcher durch die Weglassung der übrigen Glieder der Reihe entsteht, zum Theil aufgehoben wird.

§. 185,

\*) Euler gibt diese Formel in den Berlin. Ephemeriden für 1783 S. 7. Samml. und Borda, Descript. du cercle de reflex. pag. 78.

## §. 185.

Aus der geraden Aufsteigung  $\mu$ , und Abweichung  $\phi'$  des Orts der Erde oder aus seiner Lage gegen den Aequator findet man nun leicht mittelst der Schiefe der Ecliptic  $\omega$  die *Länge* ( $l$ ) und *Breite* ( $b$ ) desselben in *Beziehung auf die Himmelskugel*. Es seye  $P$  der Pol des Aequators  $A\sqrt{a}$ ,  $E$  der Pol der Ecliptic  $C\sqrt{c}$ , so hat man  $P\sqrt{a} = E\sqrt{c} = 90^\circ$ , und  $\sqrt{PE} = \sqrt{EP} = 90^\circ$ . Eines Puncts  $Z$  gerade Aufsteigung ist also  $= \sqrt{PZ}$ , seine Abweichung  $= AZ$ , und Polardistanz  $= PZ$ , seine Länge  $= \sqrt{EZ}$ , Complement seiner Breite  $= EZ$ . In dem sphärischen Dreyek kennt man die Seiten  $PE$  (Schiefe der Ecliptic),  $PZ$ , (Complement der Abweichung des Puncts  $Z$ ) und den eingeschlossenen Winkel  $EPZ = \sqrt{PZ} + 90^\circ =$  der geraden Aufsteigung des Puncts  $Z + 90^\circ$ . Also hat man

$$\begin{aligned} \cos EZ &= \cos PZ \cos PE + \sin PZ \sin PE \cos EPZ \\ \cos PEZ &= \frac{\cos PZ \sin PE - \sin PZ \cos PE \cos EPZ}{\sin EZ} \end{aligned}$$

Da aber  $EPZ = 90^\circ + \sqrt{PZ}$ , so ist  $\cos EPZ = -\sin \sqrt{PZ}$

Ferner ist  $PEZ = 90^\circ - \sqrt{EZ}$ , also  $\cos PEZ = \sin \sqrt{EZ}$ ,

setzt man also  $EZ = 90^\circ - b$ ,  $PZ = 90^\circ - \phi'$ ,  
 $PE = \omega$ ,  $\sqrt{PZ} = \mu$ ,  $\sqrt{EZ} = l$

so hat man

$$\text{I. } \sin b = \sin \phi' \cos \omega - \cos \phi' \sin \omega \sin \mu$$

$$\text{II. } \sin l = \frac{\sin \phi' \sin \omega + \cos \phi' \cos \omega \sin \mu}{\cos b}$$

Setzt man in der Formel I  $\sin \mu \cotg \varphi' = \tang x$ , so findet man

$$\sin b = \frac{\sin \varphi'}{\cos x} (\cos \omega \cos x - \sin \omega \sin x)$$

$$\text{III.} = \frac{\sin \varphi' \cos (\omega + x)}{\cos x}$$

$$\text{also ist } \cos b \cos x = \frac{\sin \varphi' \cos (\omega + x)}{\sin b}.$$

Wird nun in der Gleichung II ebenfalls  $\sin \mu \cotg \varphi' = \tang x$  gesetzt, so findet man

$$\sin l = \frac{\sin \varphi' \sin (\omega + x)}{\cos b \cos x}$$

$$\text{IV.} = \tang b \tang (\omega + x)$$

Ist  $\mu > 180^\circ$ , so wird  $x$  negativ, und man hat statt  $\omega + x$ ,  $\omega - x$ .

### §. 186.

Vermittelst der Formeln III. und IV. kann man aus jeder gegebenen geraden Aufsteigung  $\mu$ , Abweichung  $\varphi'$  und der Schiefe der Ecliptic  $\omega$  die dazu gehörige Länge  $l$  und Breite  $b$  finden. Die Formeln sind für den Fall eingerichtet, wenn die gerade Aufsteigung und folglich auch die Länge kleiner ist als  $90^\circ$ . Ist die gerade Aufsteigung  $\mu$  größer als  $90^\circ$ , so ist auch die Länge größer, und man muß den zu dem  $\sin l$  gehörigen stumpfen Winkel nehmen. Für  $\mu > 180^\circ$  wird  $\sin \mu$ ,  $\tang x$  und damit auch  $\sin l$  negativ, alsdann muß man zu dem Winkel, welchen die Formel IV. gibt,  $180^\circ$  addiren. Ist  $\mu > 270^\circ$  so ist auch  $l$  größer als  $270^\circ$ , und man findet  $l$ , wenn man den nach IV gefundenen Winkel von  $360^\circ$  abzieht.

Setzt

Setzt man nun in dieser Formel  $\mu =$  der geraden Aufsteigung der Mitte des Himmels (§. 179.)  $\phi' =$  der verbesserten Breite,  $\omega =$  der Schiefe der Eliptic, so findet man die Länge und Breite des Puncts der Himmelskugel, wo der verlängerte Halbmesser der Erde an einem Punct, dessen Breite  $\phi$  ist, hintrifft. Die Länge dieses Puncts nennt man die *Länge des Neunzigsten*, weil er 90 Grade von dem im Horizont befindlichen Punct der Ecliptic  $f$  absteht. Seine Breite ist das Complement der *Höhe  $HfC$  des Neunzigsten*, weil der Winkel  $HfC$  durch den Bogen  $ZE$  gemessen wird.

### *Berechnung der Parallaxen.*

#### §. 187.

In der 56sten Figur, Taf. VII, stelle die Ebene des Papiers die Ebene der Ecliptic vor,  $C$  seye der Mittelpunct der Erde,  $O$  irgend ein Ort auf ihrer Oberfläche,  $L$  der Ort des Monds. Von den beyden lezten Puncten fälle man die Perpendicular  $Oo, Ll$ , auf die Ebene der Ecliptic, und ziehe an die Puncte  $o$  und  $l$ , wo diese Perpendikel die Ebene der Ecliptic treffen, aus dem Mittelpunct der Erde  $C$  die geraden Linien  $Co, Cl$ , so entstehen zwey bey  $o$  und  $l$  rechtwinklichte auf der Ebene der Ecliptic senkrecht stehende Dreyeke  $OCo, LCl$ . Die Linie  $C\gamma$  liege in der Ebene der Ecliptic, und seye nach ihrem Anfangspunct  $o^\circ \gamma$  gezogen. Zieht man mit dieser die Linien  $O\gamma', o\gamma''$  parallel, so treffen sie

Y 3

eben-

ebenfalls den Punct  $o^o\Upsilon$ , weil er unendlich entfernt angenommen wird. Die Puncte  $o, l$ ;  $O, L$ , verbinde man durch die geraden Linien  $ol, OL$ ; erstere verlängere man nach  $p$ , wo sie die Linie  $C\Upsilon$  schneidet. Endlich ziehe man  $O\lambda$  mit  $ol$  parallel.  $\Upsilon Cl$  wird nun die wahre Länge des Monds,  $LCl$  seine wahre Breite,  $\Upsilon Co$  die geocentrische Länge des Orts  $O$  auf der Oberfläche der Erde (die Länge des Neunzigsten)  $OCo$  seine Breite (Complement der Höhe des Neunzigsten) seyn.  $\Upsilon''ol = \Upsilon'O\lambda$  ist die *scheinbare* oder von dem Ort  $O$ , der Erde aus gesehene Länge,  $LO\lambda$  die *scheinbare Breite* des Monds.  $\Upsilon''ol$  ist gleich  $\Upsilon pl = \Upsilon Cl + Clp$ , also  $Clp = \Upsilon pl - \Upsilon Cl = \Upsilon''ol - \Upsilon Cl =$  dem Unterschied der *scheinbaren* und *wahren Mondslänge* = der *Längenparallaxe*. Zieht man  $ot$  auf  $Cl$  senkrecht, so ist

$$\text{tang } Clp = \text{tang } olt = \frac{ot}{lt}, (A.).$$

$$\text{und } \text{tang } LO\lambda = \frac{L\lambda}{O\lambda} = \frac{El - Oo}{ol}, (B.).$$

Nun verhält sich

$$CL : Cl = 1 : \cos LCl$$

$$\text{also ist } Cl = CL \cdot \cos LCl$$

$$\text{Ferner I. } CO : Co = 1 : \cos OCo$$

$$\text{II. } Co : Ct = 1 : \cos oCl$$

$$\text{III. } Co : ot = 1 : \sin oCl$$

$$\text{also (I. u. II.) } CO : Ct = 1 : \cos OCo \cdot \cos oCl$$

$$\text{(I. u. III.) } CO : ot = 1 : \cos OCo \cdot \sin oCl$$

$$\text{Folglich ist } ot = CO \cos OCo \sin oCl$$

$$lt = Cl - Ct$$

$$= CL \cdot \cos LCl - CO \cos OCo \cdot \cos oCl$$

daher

daher

$$\begin{aligned} \text{tang } Clp &= \frac{CO \cdot \cos OCo \sin oCl}{CL \cdot \cos LCl - CO \cdot \cos OCo \cdot \cos oCl} \\ &= \frac{\frac{CO}{CL} \cdot \cos OCo \cdot \sin oCl}{\cos LCl - \frac{CO}{CL} \cos OCo \cdot \cos oCl} \end{aligned}$$

hieraus findet man die Längenparallaxe.

Kennt man nun die Längenparallaxe  $Clp$ , so hat man  $ol$ , oder  $O\lambda$  in (B): denn es ist

$$ol:lt = 1:\cos Clp$$

$$\text{folglich } ol = \frac{lt}{\cos Clp}$$

$$= \frac{CL \cdot \cos LCl - CO \cdot \cos OCo \cdot \cos oCl}{\cos Clp}$$

Ferner verhält sich

$$CO:Oo = 1:\sin OCo$$

$$\text{und } CL:Ll = 1:\sin LCl$$

$$\text{also ist } \text{tang } LO\lambda = \frac{Ll - Oo}{ol}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(CL \cdot \sin LCl - CO \cdot \sin OCo) \cos Clp}{CL \cdot \cos LCl - CO \cdot \cos OCo \cdot \cos oCl} = \\ &= \frac{(\sin LCl - \frac{CO}{CL} \sin OCo) \cos Clp}{\cos LCl - \frac{CO}{CL} \cos OCo \cdot \cos oCl} \end{aligned}$$

welches die *scheinbare Mondsbreite*  $LO\lambda$ , folglich auch die *Breitenparallaxe*  $LCl - LO\lambda$  gibt.

Endlich hat man

$$OL:O\lambda = 1:\cos LO\lambda$$

und

$$ol=O\lambda = \frac{CL \cdot \cos LCl - CO \cdot \cos OCo \cdot \cos oCl}{\cos Clp}$$

also ist

$$OL = \frac{CL \cdot \cos LCl - CO \cdot \cos OCo \cdot \cos oCl}{\cos Clp \cdot \cos LO\lambda}$$

und

$$\frac{CL}{OL} = \frac{\cos Clp \cdot \cos LO\lambda}{\cos LCl - \frac{CO}{CL} \cdot \cos OCo \cdot \cos oCl}$$

vermittelst welcher Formel man den Abstand des Mondes von dem Ort  $O$  auf der Oberfläche der Erde, in Theilen seines Abstands vom Mittelpunkt der Erde ausgedrückt, findet.

$\frac{CO}{CL}$  ist der Sinus der *Horizontalparallaxe*

§. 82. für den Ort  $O$ , welcher also dem Halbmesser der Erde  $CO$ , oder dem Abstand des Beobachters von ihrem Mittelpunkt proportional ist. Ist also die *Horizontalparallaxe unter dem Aequator*  $=\pi$ , für den Ort  $O=\pi'$ , der Halbmesser der Erde für diesen Ort in Theilen des Halbmessers des Aequators  $=\varrho$ ,

$$\text{so ist } \sin \pi' = \varrho \sin \pi = \frac{CO}{CL}$$

Den Halbmesser der Erde  $\varrho$  findet man nach §. 182. oder 184.

Setzt



Setzt man nun die	
wahre Länge des Monds	$= L$
scheinbare Länge des Monds	$= L'$
wahre Breite — —	$= B$
Horizontalparallaxe	
unter dem Aequator	$= \pi$
Länge des Neunzigsten	$= l$
Breite — —	$= b$
Längenparallaxe	$= p$
scheinbare Breite $\mathfrak{D}$	$= B'$

so ist

$$\text{tang } p = \frac{\varrho \sin \pi \cos b \sin (L-l) ^*)}{\cos B - \varrho \sin \pi \cos b \cos (L-l)}$$

$$\text{tang } B' = \frac{(\sin B - \varrho \sin \pi \sin b) \cos p}{\cos B - \varrho \sin \pi \cos b \cos (L-l)}$$

$$\frac{CL}{OL} = \frac{\cos p \cos B'}{\cos B - \varrho \sin \pi \cos b \cos (L-l)}$$

Die letztere Formel gebraucht man, um den scheinbaren Halbmesser des Monds, wie er einem Beobachter in  $O$ , erscheint, aus dem horizontalen oder von dem Mittelpunkt der Erde aus gesehenen zu finden. Der Sinus des Winkels, unter welchem der Halbmesser einer Kugel  $CO$  Fig. 52 Taf. VI. in der Entfer-

nung  $Ch$  erscheint, ist  $\frac{CO}{Ch}$ . Folglich ver-

hält sich der Sinus des scheinbaren Halbmessers des Monds in  $C$  zu dem Sinus des scheinbaren Halbmessers des Monds in  $O$  wie  $OL:CL$ .

Heißt

\*) Diese Formel ist dieselbe, welche *Lexell* in den *Berlin. Ephemeriden* für 1777 S. 152. u. f. bekannt gemacht hat.

Heißt ersterer  $\frac{1}{2}d$ , letzterer  $\frac{1}{2}d'$ , so ist  $\sin \frac{1}{2}d'$   
 $= \frac{CL}{OL} \sin \frac{1}{2}d$ , das ist

$$\sin \frac{1}{2}d' = \frac{\cos p \cos B' \sin \frac{1}{2}d}{\cos B - \varrho \sin \pi \cos b \cos (L-l)}$$

§. 188.

Um diese Formeln, welche in aller Schärfe genau sind, zur Rechnung bequemer einzurichten, dividire man Nenner und Zähler durch  $\cos B$ , so hat man

$$\text{tang } p = \frac{\varrho \frac{\sin \pi}{\cos B} \cos b \sin (L-l)}{1 - \varrho \frac{\sin \pi}{\cos B} \cos b \cos (L-l)}$$

$$\text{tang } B' = \frac{(\sin B - \varrho \sin \pi \sin b) \frac{\cos p}{\cos B}}{1 - \varrho \frac{\sin \pi}{\cos B} \cos b \cos (L-l)}$$

$$\text{Man setze } \varrho \sin \pi \frac{\cos b}{\cos B} \cos (L-l) = \cos A$$

$$\varrho \sin \pi \sin b = \sin C$$

so wird

$$\text{tang } p = \frac{\frac{1}{2} \varrho \sin \pi \cos b \sin (L-l)}{\cos B (\sin \frac{1}{2}A)^2}$$

$$\text{tang } B' = \frac{\sin \frac{1}{2}(B-C) \cos \frac{1}{2}(B+C) \cos p}{\cos B (\sin \frac{1}{2}A)^2}$$

$$\sin \frac{1}{2}d' = \frac{\frac{1}{2} \cos p \cos B' \sin \frac{1}{2}d}{\cos B (\sin \frac{1}{2}A)^2}$$

Die

Die Breite des Mondes  $B$  kann nicht größer werden als  $5^{\circ} 18'$ , die Horizontalparallaxe  $\pi$  nicht größer als  $61' 30''$ , folglich  $\frac{\rho \cos b}{\cos B} \cos(L-l)$  nicht größer als 1,0043. Setzt man diese Grösse  $= m$ , so hat man

$$m \sin \pi = \cos A$$

Für gegenwärtigen Fall ist aber bis auf Milliontheile von Secunden genau

$$m \sin \pi = m \left( \pi - \frac{1}{6} \pi^3 \right)$$

$$\text{und } \sin m \pi = m \pi - \frac{1}{6} m^3 \pi^3$$

$$\text{also } \sin m \pi - m \sin \pi = \frac{1}{6} (m - m^3) \pi^3$$

Für  $m = 0$  und  $m = 1$  wird der Unterschied beyder Gröfsen  $= 0$ , und am größten, wenn

$$(3m^2 - 1) dm = 0, \text{ oder } m = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,57735,$$

also der größte Unterschied selbst  $= 0,06415 \cdot \pi^3 = 0,07''$ ; für  $m = 1,0043$  wird der Unterschied zwischen  $m \sin \pi$  und  $\sin m \pi$  noch weit kleiner. Also kann man, ohne in der Berechnung der Mondsparrallaxen einen Fehler  $> 0,07''$  zu begehen, setzen:

$$\frac{\rho \pi \cos b \cos(L-l)}{\cos B} = 90^{\circ} - A$$

$$\rho \pi \sin b = C$$

wodurch die Rechnung noch mehr abgekürzt wird.

Bey der Berechnung des scheinbaren Mondsdurchmessers  $d'$  kann man ohne merklichen Fehler setzen

$$\frac{1}{2} d' = \frac{\frac{1}{4} d \cdot \cos p \cos B'}{\cos B (\sin \frac{1}{2} A)^2}.$$

So

So lange  $L$  größer ist als  $l$ , d. h. die Länge des Monds  $>$  die Länge des Neunzigsten, ist auch die scheinbare Mondslänge größer als die wahre, und  $L' - L = p$  positiv. Wird aber die Länge des  $\text{D}$   $<$  die Länge des Neunzigsten, so ist die scheinbare Mondslänge *kleiner* als die wahre, und  $L' - l$  oder  $p$  negativ, welches auch die Formel selbst angibt, weil  $\sin(L - l)$ , und damit auch  $\tan p$  negativ wird.

Ist die *wahre* Breite des Monds *nördlich*, so ist auch die *scheinbare* Breite  $B'$  *nördlich*, so lange  $C < B$ . Wird aber  $C > B$ , so wird die scheinbare Breite des Monds *südlich*;  $B - C$  wird alsdann *negativ*.

Ist die *wahre* Breite des Monds *südlich*, so ist auch die *scheinbare* Breite *südlich*, und es ist  $\sin \frac{1}{2}(B - C) = -\sin \frac{1}{2}(B + C)$ ;  $\cos(B + C) = \cos(C - B)$ .

Berechnet man vermittelst obiger Formel die Längenparallaxe, so hat man immer  $L = L' - p$ , wobey man aber auf das Zeichen, welches  $p$  bekommt, Achtung geben muß.

### §. 189.

Die Längenparallaxe und die scheinbare Breite können auf folgende Art gefunden werden. In der 56sten Figur verhält sich

$$ol:ot = 1:\sin p$$

$$ol:Cl = \sin(L-l):\sin Col$$

$$= \sin(L-l):\sin poC$$

$$\text{Aber } poC = oCl + olC = L - l + p$$

$$\text{also } ol = \frac{Cl \sin(L-l)}{\sin(L-l+p)}$$

Nun

Nun ist  $Cl = CL \cos B$

$$ot = OC \cos b \sin(L-l)$$

folglich  $\left. \begin{array}{l} ol:ot \\ 1:\sin p \end{array} \right\} = \cos B : \frac{OC}{CL} \cos b \sin(L-l+p)$

daher  $\sin p = \frac{\varrho \sin \pi \cos b \sin(L-l+p)}{\cos B}$

Da ferner  $\tan B' = \frac{L\lambda}{ol} = \frac{CL \sin B - CO \sin b}{ol}$

und  $ol = \frac{CL \cos B \sin(L-l)}{\sin(L-l+p)}$

so ist

$$\tan B' = \frac{\sin(L-l+p)(\sin B - \varrho \sin \pi \sin b)}{\sin(L-l) \cos B}$$

Weil nun die Winkel  $p$  und  $B'$  klein sind, so hat man beynahe

$$p = \frac{\varrho \pi \cos b \sin(L-l+p)}{\cos B}$$

$$\text{und } B' = \frac{\sin(L-l+p)}{\sin(L-l) \cos B} \cdot B - \frac{\varrho \pi \sin b \sin(L-l+p)}{\sin(L-l) \cos B}$$

aber  $\frac{\sin(L-l+p)}{\cos B} = \frac{p}{\varrho \pi \cos b}$ , also

$$B' = \frac{\sin(L-l+p)}{\sin(L-l) \cos B} \cdot B - \frac{p \tan b}{\sin(L-l)}$$

Diese Näherungsformel für die Längenparallaxe geben *Cagnoli* \*) und *Gerstner* \*\*). Die Rechnung wird auf die bekannte Art so geführt, daß man zuerst einen nahen Werth von  $p$  sucht, indem man  $p = \frac{\varrho \pi \cos b \sin(L+l)}{\cos B}$

setzt, und hernach diesen Werth von  $p$  in die Formel setzt, um  $p$  genauer zu finden.

Verlangt man die Parallaxen nicht sehr genau, so kann man die Formeln des 188. §. auf folgende reduciren:

$$p = \frac{\frac{1}{2} \varrho \pi \cos b \sin(L-l)}{\cos B (\sin \frac{1}{2} A)^2}$$

$$B' = \frac{\frac{1}{2} (B-C) \cos \frac{1}{2} (B+C) \cos p}{\cos B (\sin \frac{1}{2} A)^2}$$

$$\frac{1}{2} d' = \frac{\frac{1}{4} d. \cos p \cos B'}{\cos B (\sin \frac{1}{2} A)^2}$$

$$\text{wo } 90^\circ - A = \frac{\varrho \pi \cos b \cos(L-l)}{\cos B}$$

$$\text{und } C = \varrho \pi \sin b.$$

Meine Formeln, (sowohl die genauen §. 188, als auch die hier gegebenen Näherungsformeln) scheinen mir den Vorzug vor den übrigen zu haben, daß sie auf alle Fälle anwendbar sind, und die Parallaxe der Länge und die scheinbare Breite directe vermittelt derselben gefunden werden können. Die *Lexellsche*

\*) Méthode pour calculer les longitudes géographiques d'après l'observation d'éclipses de soleil ou d'occultations d'étoiles, à Vérone MDCCLXXXIX.

\*\*) Astron. Jahrbuch für 1791. S. 243 u. f. 1792. S. 193. u. f.

sche Formel \*) für die scheinbare Breite gibt, wenn die Breite des Monds  $B=0$  ist, unendliche Ausdrücke, und kann also bey Sonnenfinsternissen, wo die Mondsbreite immer sehr klein, nicht sicher gebraucht werden. Herrn *Gerstners* Formel für die scheinbare Breite und die Vergrößerung des Halbmessers des Monds kann ebenfalls nicht gebraucht werden, wenn die Länge des Monds der Länge des Neunzigsten gleich ist, weswegen er für diesen Fall eine besondere Formel gibt. Ist die Länge des Neunzigsten von der Länge des Monds wenig verschieden, so wird der Gebrauch dieser Formel unsicher.

Die drey Formeln (§. 188. oder 189.), welche man bey Berechnung der Sonnenfinsternisse nöthig hat, haben dieselben Nenner, wodurch die Rechnung sehr abgekürzt wird.

### §. 190.

Die Berechnung des Neunzigsten kann man sich ersparen, wenn man in den Formeln §. 188. die drey Größen

$$\text{I. } \cos b \sin (L - l) = P$$

$$\text{II. } \cos b \cos (L - l) = Q$$

$$\text{III. } \sin b = R$$

durch  $\phi'$ ,  $\omega$ ,  $L$  und  $\mu$  (§. 185.) ausdrückt. Man hat

$$P = \cos b \sin L \cos l - \cos b \cos L \sin l$$

$$Q = \cos b \cos L \cos l + \cos b \sin L \sin l$$

aber

\*) Berlin. Ephemeriden für 1777. Th. II. S. 153. Dieselbe Formel gibt Herr *de Lambre* in den Schwed. Abhandlungen auf d. J. 1788. S. 82. der Kästnerschen Uebersetzung.

aber

$$\sin l = (\sin \varphi' \sin \omega + \cos \varphi' \cos \omega \sin \mu) \frac{1}{\cos b} \quad (\S. 185.)$$

$$\text{und } \sin ZEP = \frac{\sin PZ \sin ZPE}{\sin ZE} \quad (\text{Fig. 55.})$$

$$\begin{aligned} \text{d. i. } \cos l &= \frac{\cos \varphi'}{\cos b} \sin (90^\circ + \mu) \\ &= \frac{\cos \varphi'}{\cos b} \cos \mu \end{aligned}$$

also ist

$$P = \cos \varphi' \cos \mu \sin L - \sin \varphi' \sin \omega \cos L - \cos \varphi' \cos \omega \sin \mu \cos L$$

$$Q = \cos \varphi' \cos \mu \cos L + \sin \varphi' \sin \omega \sin L + \cos \varphi' \cos \omega \sin \mu \cos L.$$

$$R = \sin \varphi' \cos \omega - \cos \varphi' \sin \omega \sin \mu. \quad (\S. 185.)$$

Man setze

$$A = \varphi \pi \sec. B \cos \varphi' \cos \mu$$

$$D = \varphi \pi \sec. B \sin \varphi' \sin \omega$$

$$E = \varphi \pi \sec. B \cos \varphi' \cos \omega \sin \mu$$

$$F = \varphi \pi \sin \varphi' \cos \omega$$

$$G = \varphi \pi \cos \varphi' \sin \omega \sin \mu$$

$$\text{und } P' = A \sin L - (D + E) \cos L$$

$$Q' = A \cos L + (D + E) \sin L$$

$$R' = F - G = C. \quad (\S. 188.)$$

so hat man bis auf 0,07'' genau (§. 188.)

$$\text{tang } p = \frac{\frac{1}{2} \sin P'}{\cos B \left( \sin \frac{90^\circ - Q'}{2} \right)^2}$$

tang



$$\text{tang } B' = \frac{\sin \frac{1}{2}(B-C) \cos \frac{1}{2}(B+C) \cos p}{\cos B \left( \sin \frac{90^\circ - Q'}{2} \right)^2}$$

$$\frac{1}{2} d' = \frac{\frac{1}{4} d \cos p \cos B'}{\cos B \left( \sin \frac{90^\circ - Q'}{2} \right)^2}$$

$P'$  drückt, bis  $\frac{1}{60}$  des Ganzen genau, die *Längenparallaxe*,  $R'$  die *Breitenparallaxe* aus. Die Winkel sind in diesen Formeln durchaus kleiner als  $90^\circ$  angenommen; werden sie grösser, so muß man den dazu gehörigen trigonometrischen Linien ihre gehörigen Zeichen geben.

### §. 191.

*Berechnung der wahren Zusammenkunft des Mondes mit der Sonne aus dem scheinbaren Abstand ihrer Mittelpunkte.*

Wenn man vermittelst der in den vorhergehenden §. gegebenen Formeln die Längenparallaxe, die scheinbare Breite des Mondes und seinen scheinbaren Halbmesser für den Augenblick der Beobachtung des Anfangs oder des Endes der Sonnenfinsterniß gefunden hat, so löse man das rechtwinklichte sphärische Dreyek  $\odot \odot B$  Fig. 53. Taf. VI. auf, in welchem  $\odot \odot =$  der Summe der Halbmesser der Sonne und des Mondes,  $B \odot$  die scheinbare Breite des Mondes ist (§. 178.). Weil die Seiten dieses Dreyeks sehr klein sind, so kann man es als ein geradlinigtes betrachten, und man hat

Z

( $B \odot$ )

$$\begin{aligned}(B\odot)^2 &= (\odot\mathfrak{D})^2 - (B\mathfrak{D})^2 \\ &= (\odot\mathfrak{D} + B\mathfrak{D})(\odot\mathfrak{D} - B\mathfrak{D})\end{aligned}$$

Will man aber nach aller Schärfe rechnen, so hat man

$$\cos B\odot = \frac{\cos \odot\mathfrak{D}}{\cos B\mathfrak{D}}$$

weil diese Formel bey kleinen Seiten etwas unsicher ist, wenn man keine große trigonometrische Tafeln hat, so muß man ihr eine andere Gestalt geben.

Es ist

$$\cos B\odot = 2(\cos \frac{1}{2}B\odot)^2 - 1 = 1 - 2(\sin \frac{1}{2}B\odot)^2$$

$$\text{also } \left( \frac{\sin \frac{1}{2}B\odot}{\cos \frac{1}{2}B\odot} \right)^2 = \frac{\cos B\mathfrak{D} - \cos \mathfrak{D}\odot}{\cos B\mathfrak{D} + \cos \mathfrak{D}\odot}$$

$$\text{das ist } \tan \frac{1}{2}B\odot =$$

$$\sqrt{\tan \left( \frac{\odot\mathfrak{D} + B\mathfrak{D}}{2} \right) \cdot \tan \left( \frac{\odot\mathfrak{D} - B\mathfrak{D}}{2} \right)}$$

Heißt nun die scheinbare Länge der Sonne  $\odot'$ , die scheinbare Länge des Monds  $L'$ , so hat man für den Anfang der Sonnenfinsternis, wo die scheinbare Länge des Monds kleiner ist als die scheinbare Länge der Sonne

$$B\odot = \odot' - L'$$

Die Längenparallaxe der Sonne seye  $= q$ , die Längenparallaxe des Monds, wie oben,  $= p$ , so hat man, wenn  $\odot$  die wahre Länge der Sonne,  $L$  die wahre Länge des Monds ist

$$\odot = \odot' - q$$

$$L = L' - p \quad (\S. 188,)$$

$$\text{also } \odot - L = \odot' - L' + p - q$$

$$= B\odot + p - q \quad \text{für den Anfang.}$$

$$\text{und } L - \odot = L' - \odot - (p - q)$$

$$= B\odot - (p - q) \quad \text{für das Ende.}$$

folg-

folglich ist der Unterschied der wahren Längen der Sonne und des Monds = dem Unterschied der scheinbaren Längen  $\pm$  Unterschied der Längenparallaxen des Monds und der Sonne. Nun ist bey Sonnenfinsternissen die Länge der Sonne von der Länge des Monds wenig verschieden; beyde würden also beynahe dieselbe Parallaxe haben, wenn die Horizontalparallaxen gleich wären. Aus den Formeln §. 188. und 190. sieht man, daß die Parallaxen sehr nahe den Horizontalparallaxen proportional sind, man findet also, da die Horizontalparallaxe der Sonne ohnehin klein ist, vermittelt obiger Formeln sogleich den Unterschied der Längenparallaxen des Monds und der Sonne, wenn man statt der Horizontalparallaxe des Monds ( $\pi$ ) den Unterschied zwischen der Horizontalparallaxe des Monds und der Sonne ( $\pi''$ ) in die Formeln §. 188. od. 190. setzt. Ebenso verhält es sich mit der scheinbaren Breite, statt welcher man nach dieser Vorschrift den Unterschied zwischen der scheinbaren Breite des Monds und der Sonne findet.

Ist  $p$  und folglich auch  $q$  negativ, oder die wahre Mondslänge kleiner als die Länge des Neunzigsten, so ist

$$\odot - L = B\odot - (p - q) \text{ für den Anfang,}$$

$$L - \odot = B\odot + p - q \text{ für das Ende.}$$

Nun seye die stündliche Bewegung des Monds in der Eliptic =  $H$  Secunden, die stündliche

Bewegung der Sonne =  $h$  Sec. und  $\frac{3600}{H-h} = m'$ ,

so hat man

$$H - h$$

$$H-h: \odot - L = 3600: t$$

$$\text{folglich } t = m' (\odot - L)$$

Die mittlere Zeit der Beobachtung des Anfangs der Sonnenfinsternißs seye  $T$ , so ist die mittlere Zeit der wahren Zusammenkunft des Mondes mit der Sonne

$$T + t = T + m' (\odot - L)$$

und für die mittlere Zeit  $T'$  des Endes der Finsternißs die mittl. Zeit

$$\text{der } \oslash \odot = T' - t' = T' - m' (L - \odot)$$

§. 192.

Wenn man gleich die Beobachtungen als genau voraussetzt, so würde doch die auf diese Art gefundene Zeit der wahren Zusammenkunft des Mondes mit der Sonne merklich von der Wahrheit abweichen können, wenn die bey ihrer Berechnung gebrauchten Elemente, die man aus den astronomischen Tafeln nehmen muß, etwas unrichtig wären. Da man aber die Fehler dieser Elemente bey der großen Vollkommenheit der Mondstafeln immer als sehr klein ansehen kann, so findet man die Veränderung der Zeit der wahren Zusammenkunft, wenn man den Ausdruck für dieselbe differentiirt. In demselben ist die Grösse  $m' (\odot - L)$  oder  $m' (L - \odot)$  veränderlich, und man hat, wenn  $\mathcal{S}$  die Zeit der  $\oslash \odot$  aus dem Anfang,  $\mathcal{S}'$  die Zeit der  $\oslash$  aus dem Ende der Finsternißs ist

$$d\mathcal{S} = + m' d. (\odot - L)$$

$$d\mathcal{S}' = - m' d. (L - \odot)$$

$$\text{aber } \odot - L = B\odot + p - q$$

$$L - \odot = B\odot - (p - q)$$

also

also  $d(\odot - L) = d.B\odot + d.(p - q)$

$$d(L - \odot) = d.B\odot - d.(p - q)$$

$B\odot$  wurde aus der Summe der Halbmesser der Sonne und des Mondes, und aus der scheinbaren Breite gefunden. Setzt man  $B\mathfrak{D} = B'$  und  $\odot\mathfrak{D} = S$ , so hat man (§. 191.)

$$S^2 = (B\odot)^2 + B'^2$$

$$\text{folglich } dB\odot = \frac{S}{B\odot} dS - \frac{B'}{B\odot} d.B'$$

das ist, wenn der Winkel  $B\odot\mathfrak{D} = \psi$  gesetzt wird,

$$d.B\odot = dS. \sec \psi - d.B'. \tan \psi$$

also ist

$$d\vartheta = +m'dS. \sec \psi - m'd.B'. \tan \psi + m'd.(p - q)$$

$$d\vartheta' = -m'dS. \sec \psi + m'd.B'. \tan \psi + m'd.(p - q)$$

Nun ist

$$p - q = \frac{\frac{1}{2}\varrho \pi'' \cos b \sin(L - l)}{\cos B (\sin \frac{1}{2} A)^2} \quad (\S. 189.)$$

und der Werth von  $p - q$  ändert sich nicht merklich, wenn  $L - l$  und  $A$  eine kleine Aenderung leiden, man hat also

$$\begin{aligned} d(p - q) &= \frac{\frac{1}{2}\varrho d\pi'' \cos b \sin(L - l)}{\cos B (\sin \frac{1}{2} A)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\varrho \pi'' \cos b \sin(L - l)}{\cos B (\sin \frac{1}{2} A)^2} \frac{d\pi''}{\pi''} \end{aligned}$$

$$\text{folglich ist } d(p - q) = \frac{(p - q) d\pi''}{\pi''}.$$

ebenso findet sich, wenn der Unterschied der Breitenparallaxen  $= p' - q'$  gesetzt wird

$$d.B' = dB - \frac{(p' - q')}{\pi''} d\pi''$$

also ist

$$\begin{aligned} d\vartheta &= +m' \sec \psi. dS - m' \tan \psi. dB \\ &\quad + \frac{m'}{\pi''} ((p' - q') \tan \psi + (p - q)) d\pi'' \\ d\vartheta' &= -m' \sec \psi. dS + m' \tan \psi. dB \\ &\quad - \frac{m'}{\pi''} ((p' - q') \tan \psi - (p - q)) d\pi'' \end{aligned}$$

In diesen Formeln sind die Gröſſen  $dS$ ,  $p'$ ,  $q'$ ,  $d\pi''$  als positiv angenommen, und  $dB$  bedeutet Annäherung gegen den Nordpol der Ecliptic. Ist also die scheinbare Mondsweite *südlich*, so ist

$$dB = - \left( dB - \frac{(p' - q')}{\pi''} \right) d\pi''$$

und

$$\begin{aligned} d\vartheta &= +m' \sec \psi. dS + m' \tan \psi. dB \\ &\quad - \frac{m'}{\pi''} ((p' - q') \tan \psi - (p - q)) d\pi'' \\ d\vartheta' &= -m' \sec \psi. dS - m' \tan \psi. dB \\ &\quad + \frac{m'}{\pi''} ((p' - q') \tan \psi + (p - q)) d\pi'' \end{aligned}$$

Kennt man nun die Werthe von  $dS$ ,  $dB$  und  $d\pi''$ , so hat man die Zeit der wahren  $\odot\odot$  aus dem Anfang  $= \vartheta + d\vartheta$ , und aus dem Ende  $= \vartheta' + d\vartheta'$ .

Wenn die Beobachtungen als genau angenommen werden, so müssen die aus dem Anfang und Ende hergeleiteten Zeiten der wahren Zusammenkunft des Monds mit der Sonne einander gleich seyn, und man hat die Gleichung

$$d\vartheta - d\vartheta' = (\alpha + \alpha') dS - (\beta + \beta') dB + (\gamma + \gamma') d\pi''$$

In

In dieser Gleichung ist  $d\vartheta - d\vartheta' =$  dem Unterschied der aus dem Anfang und Ende der Finsterniß hergeleiteten Zeiten des wahren Neumonds, die Coefficienten von  $dS$ ,  $dB$  und  $d\pi''$  sind ebenfalls gegeben. Hat man also von drey verschiedenen Orten Beobachtungen des Anfangs und des Endes einer Sonnenfinsterniß, so erhält man drey Gleichungen, vermittelt welcher die drey unbekannten Größen  $dS$ ,  $dB$  und  $d\pi''$  bestimmt werden können.

Zieht man die Zeiten der aus Beobachtungen an verschiedenen Orten bestimmten Zusammenkünfte des Monds mit der Sonne von einander ab, um den Mittagsunterschied zu finden, so heben sich die von den Größen  $dS$ ,  $dB$  und  $d\pi''$  herrührenden Fehler öfters gegen einander auf, oder werden unbedeutend. Dieses erkennt man sogleich, wenn die Coefficienten jener Größen sich gegeneinander aufheben oder sehr klein werden. Wenn die Sonnenfinsterniß klein ist, so wird  $\sec \psi$  sehr gros, so wie auch  $\tan \psi$ . Aus kleinen Sonnenfinsternissen kann man also die Länge nicht sicher bestimmen \*).

Nach den Untersuchungen, welche *du Séjour* über die Sonnenfinsternisse 1764 und 1769

\*) Die Methode, vermittelt der hier gegebenen Differentialformeln die Längen genauer zu bestimmen und die Fehler der Mondstafeln zu verbessern, lehrte zuerst *Lexell*. N. Comment. academiae scientiarum imp. petropolitanae T. XV. Berl. Ephemeriden für 1776. S. 176.

1769 angestellt hat, muß man den Halbmesser des Monds um  $3'',5$ , wegen der *Inflexion* und den Halbmesser der Sonne um  $3''$  wegen der *Irradiation* bey der Berechnung des Anfangs und des Endes der Finsternisse vermindern. *Traité analytique des mouvements app. des corps célestes. Tom. I, pag. 394. et suiv.*

### §. 193.

Will man nun aus der Beobachtung einer Sonnenfinsterniß die Zeit der wahren Zusammenkunft des Monds mit der Sonne herleiten, so berechnet man aus den astronomischen Tafeln für den Augenblick der Beobachtung \*) die wahre Länge des Monds, seine Breite, stündliche Bewegung in der Ecliptic, Horizontalparallaxe unter dem Aequator und seinen Horizontal-Halbmesser. Ferner die mittlere Länge der Sonne, ihre wahre stündliche Bewegung, ihren Halbmesser und die Zeitgleichung.

Da man diese Stücke, wenn man mehrere Beobachtungen von verschiedenen Orten berechnet, für mehrere Zeitpunete nöthig hat, so berechnet man am sichersten obige Elemente, wenn man sie für die ganze Dauer der Sonnenfinsterniß auf der Erde von 2 zu 2 Stunden sucht, und sie für den Augenblick einer

\*) Man sieht hieraus, daß man den Mittagsunterschied zwischen dem Ort der Beobachtung und dem Meridian, für welchen die astr. Tafeln berechnet sind, schon beynahe kennen muß. Doch braucht man diesen nur bis auf  $\frac{1}{2}$  Min. genau zu wissen.



einer Beobachtung durch Interpolation berechnet.

Um die Beobachtungen auch mit den Tafeln vergleichen zu können, die an einem Ort, dessen Länge man genau kennt, sind beobachtet worden, berechnet man auch die wahre Länge der Sonne, um die Zeit der  $\odot$  nach den Tafeln angeben zu können.

*Anwendung der Methode, die Länge durch Sonnenfinsternisse zu bestimmen, auf Beobachtungen der Sonnenfinsternis d. 5 September 1793.*

§. 194.

Nach den Tafeln in der dritten Ausgabe von *la Lande's Astronomie* berechnete ich folgende zur Berechnung der Finsternis erforderlichen Elemente für drey Zeitpuncte nach mittlerer Zeit des Pariser Meridians:

1793. Sept. 4.	22 <sup>U.</sup>	0' 0"	
wahre Mondslänge =	5 <sup>Z.</sup>	12° 16' 3",7	
— Breite, nördl. =	0	0 34 31,7	
stündl. Beweg. =	0	0 29 36,05	
Aequat. Parall. =	0	0 54 6,8	
mittl. Länge $\odot$ =	5	14 56 38,6	
Horiz. Parall. =	0	0 0 8,43	
Halbmesser =	0	0 15 56,14	
stündl. Beweg. =	0	0 2 25,75	
Zeitgleichung =	1'	41",08	

Sept. 5. 0<sup>h</sup>. 0' 0"

$$L = 52. 13^{\circ} 15' 15'',8$$

$$B = 0 \quad 0 \quad 39 \quad 58,9$$

$$H = 0 \quad 0 \quad 29 \quad 35,92$$

$$\pi = 0 \quad 0 \quad 54 \quad 7,2$$

$$\text{mittl. } \odot = 5 \quad 15 \quad 1 \quad 34,4$$

$$\text{Zeitgleichung} = 1' 42'',71$$


---

Sept. 5. 2<sup>h</sup>. 0' 0"

$$L = 52. 14^{\circ} 14' 27'',4$$

$$B = 0 \quad 0 \quad 45 \quad 23,6$$

$$H = 0 \quad 0 \quad 29 \quad 35,8$$

$$\pi = 0 \quad 0 \quad 54 \quad 8,2$$

$$\text{mittl. } \odot = 5 \quad 15 \quad 6 \quad 30,0$$

$$\text{Zeitgleichung} = 1' 44'',35$$

*Anmerkung.* Die Mondstafeln in *la Lande's Astronomie* sind von der neuern *Masonschen* Ausgabe von *Mayers* Mondstafeln, die man auch in der *Connaissance des temps pour l'année 1790* auf den Pariser Meridian (9' 20" östlich von Greenwich) reducirt findet, etwas verschieden. Er verminderte die Länge 1780 um 5",7 und die Secularbewegung um 23". Die Seculargleichung berechnete er nach der Formel von *de la Place*

$$11'',135. i^2 + 0,04398. i^3$$

in welcher *i* die Anzahl der von 1700 an verfloßnen Jahrhunderte ist. Für die Jahre vor 1700 wird *i* negativ gesetzt. *De la Place* fand die Ursache der Seculargleichung in der Verminderung der Excentricität der Erdbahn verbunden mit der Wirkung der Sonne. Die mittlere Geschwindigkeit des Mondes wächst, wenn die Excentricität abnimmt, welches von den ältesten Beobachtungen her bis auf unsere Zeiten statt findet, sie nimmt aber ab, wenn jene Excentricität anfängt zu wachsen. *De Lambre* schloß aus der Vergleichung einer grossen Anzahl von Beobachtungen dieses Jahrhunderts, daß man um ungefähr 25" die mittlere Secularbewegung des Mondes, welche *Mayer* angegeben, und *Mason* beybehalten hat, vermindern müsse, so daß, wenn *i* die Anzahl der nach

1756 verfloßenen Jahrhunderte ist, man von der mittlern Länge 25. i abzieht. Die Tafel für die Horizontalpallaxe des Monds für Paris hat *la Lande* von neuem berechnet, und zwar, wie er selbst sagt, nach der Formel  $57' 8'',685 - (3' 8'',7) \cos. an. vraie$  in der elliptischen Hypothese. Allein die Tafel weicht bey  $32.0^{\circ}$  um  $20'',7$  von dem ab, was die Formel gibt. Der Mayerschen Tafel (Tab. mot,  $\odot$  et  $\sphericalangle$  London 1770. pag. LXXII.) liegt die Formel zum Grund  $3431'',0 - 187'',7 \cos a + 10'',0 \cos 2a - 0'',3 \cos 3a$ , woraus man sieht, daß diese Tafel nicht allein die Parallaxe in der elliptischen Hypothese, sondern noch eine von der wahren Anomalie  $\sphericalangle$  abhängende Ungleichheit der Parallaxe enthält. Hätte also *la Lande* seine Tafel wirklich, nach seiner Formel berechnet, so hätte er bey seiner Parallaxe noch diese Gleichung besonders anbringen müssen. Ob durch Anbringung dieser Gleichung *la Lande's* Tafel entstanden ist, sagt er nicht. Ich habe daher die Parallaxe aus Mayers Tafeln genommen, und  $5''$  davon abgezogen, weil *la L.* glaubt, daß sie bey  $\frac{1}{300}$  Abplattung um so viel müsse vermindert werden. In der *Conn. des temps* 1791 steht eine Tafel von *de Lambré*, welche nicht über  $2'',2$  von der Mayerschen abweicht und aus den Masonschen Tafeln abgeleitet ist.

### §. 195.

#### *Berechnung der Beobachtung der Sonnenfinsterniß in Harefield von H. Grafen Brühl.*

Anfang der Finsterniß  $21^u. 35' 21'',76$  mittl. Zeit  
Mittagsuntersch. zwi-

schen Harefield u. Paris =  $11 \quad 16,86$

mittl. Zeit in Paris  $21 \quad 46 \quad 38,62$

Für diese Zeit findet sich aus §. 194.

die wahre Mondslänge  $= 162^{\circ} 9' 33'' = L$

die wahre Breite  $= 0^{\circ} 33' 55,7'' = B$

Aequat. Parall.  $= 0^{\circ} 54' 6,75'' = \pi$

Halbm. d. Monds  $= 0^{\circ} 14' 44,72'' = \frac{1}{2}d$

stündl. Bew. d. M.  $= 0^{\circ} 29' 56,05'' = H$

stündl. Bew. d. Sonne  $= 0^{\circ} 2' 25,75'' = h$

mittlere Länge  $\odot = 164^{\circ} 56' 6'',1$

mittlere Zeit in Gr.  $= 323^{\circ} 50' 26,4''$

$488' 46'' 32,5$

$- 360$

$\mu = 128^{\circ} 46' 32,5''$

Schiefe der Ecliptic  $= 23^{\circ} 27' 48,1'' = \omega$

Breite von Harefield  $= 51^{\circ} 36' 10'' = \phi$

Hieraus findet sich die verbesserte Breite  $\phi'$

nach §. 181., wenn  $\frac{n}{m} = \frac{328}{308}$  gesetzt wird,

und  $\epsilon$  nach §. 182.

$\text{Lg } n = 2,4756712$

$\text{Lg } m = 2,4771213$

$\text{Lg } \frac{n}{m} = 0,9985499 - 1$

$\text{Lg } \frac{n^2}{m^2} = 0,9970998 - 1$

$\text{Lg } \text{tg } \phi = 10,1009945$

$\text{Lg } \text{tg } \phi' = 10,0980943$

$\phi = 51^{\circ} 24' 59''$

$\phi = 51^{\circ} 36' 10''$

$\phi - \phi' = 11' 11''$

$$\begin{aligned}
 \text{Lg } \cos \varphi &= 9,7931684 \\
 \text{C. Lg } \cos \varphi' &= 0,2050549 \\
 \text{C. Lg } \cos (\varphi - \varphi') &= 0,0000023 \\
 \text{Lg } \varphi^2 &= 9,9982256 - 10 \\
 \text{Lg } \varphi &= 9,9991128 - 10
 \end{aligned}$$

Nun berechnet man die Länge und Breite des Zeniths. (§. 185.)

$$\begin{aligned}
 \text{Lg } \cotg \varphi' &= 9,9019056 \\
 \text{Lg } \sin \mu &= 9,8918781 \\
 \text{Lg } \tan x &= 9,7937837 \\
 x &= 31^\circ 52' 52'',4 \\
 \omega &= 23^\circ 27' 48,1 \\
 \omega + x &= 55^\circ 20' 40,5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Lg } \cos (\omega + x) &= 9,7548386 \\
 \text{Lg } \sin \varphi' &= 9,8930395 \\
 \text{C. Lg } \cos x &= 0,0710177 \\
 \text{Lg } \sin b &= 9,7188958 \\
 b &= 31^\circ 33' 56''
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Lg } \tan (\omega + x) &= 10,1603424 \\
 \text{Lg } \tan b &= 9,7884340 \\
 \text{Lg } \sin l &= 9,9487764 \\
 &\text{gehört zu } 62^\circ 42' 57''
 \end{aligned}$$

Da aber  $\mu$  größer ist als  $90^\circ$ , so muß auch  $l$  größer seyn als  $90^\circ$ , und also das Supplement dieses Winkels genommen werden (§. 186.). Folglich ist

$$\begin{aligned}
 l &= 117^\circ 17' 3'' \\
 L &= 162^\circ 9' 33'' \\
 L - l &= 44^\circ 52' 30''
 \end{aligned}$$

Berech-

Berechnung der Parallaxen nach den genauen Formeln §. 188.

$$\text{Lg } \rho = 9,9991128 - 10$$

$$\text{Lg } \pi'' = 3,5103198$$

$$\text{Lg } \cos b = 9,9304608 - 10$$

$$\text{Lg } \cos(L - l) = 9,8504304 - 10$$

$$\text{C. Lg } \cos B = 0,0000211$$

$$\hline 3,2903449$$

gehört zu  $32' 31'',4$

$$\hline 89 \ 59 \ 60,0$$

$$A = 89 \ 27 \ 28,6$$

$$\frac{1}{2}A = 44 \ 43 \ 44,3$$

$$2 \text{Lg } \sin \frac{1}{2}A = 19,6948418 - 20$$

$$\text{Lg } \cos B = 9,9999789 - 10$$

$$\hline 29,6948207 - 30$$

$$\text{C. arith. } 0,3051793 = N$$

$$\text{Lg } \rho = 9,9991128 - 10$$

$$\text{Lg } \frac{1}{2} = 0,6989700 - 1$$

$$\text{Lg } \sin \pi'' = 8,1958768$$

$$\text{Lg } \cos b = 9,9304608 - 10$$

$$\text{Lg } \sin(L - l) = 9,8485354 - 10$$

$$\hline N = 0,3051793$$

$$\text{Lg } \text{tg } p'' = 7,9781351$$

$$\left. \begin{array}{l} p'' - q \\ p'' \end{array} \right\} = 32' 41'',31$$

$$\begin{aligned}
\text{Lg } \rho &= 9,9991128 - 10 \\
\text{Lg } \pi'' &= 3,5103198 \\
\text{Lg } \sin b &= 9,7188958 - 10 \\
\text{Lg } C &= 3,2283284 \\
C &= 28' 11'',72 \\
B &= 33' 55,70 \\
B - C &= 5' 44,0 \\
B + C &= 62' 7,4 \\
\frac{1}{2}(B - C) &= 2' 52,0 \\
\frac{1}{2}(B + C) &= 31' 3,7 \\
\text{Lg } \sin \frac{1}{2}(B - C) &= 6,9211033 \\
\text{Lg } \cos \frac{1}{2}(B + C) &= 9,9999823 - 10 \\
\text{Lg } \cos p &= 9,9999804 - 10 \\
N &= 0,3051793 \\
\text{Lg } \tan B' &= 7,2262453 \\
B' &= 5' 47'',28
\end{aligned}$$

Vermittelst der Näherungsformeln §. 189 findet man die Längenparallaxe und die scheinbare Breite auf folgende Art:

$N$  findet sich wie oben  $= 0,3051793$ , und ebenso  $C = 28' 11'',72$

$$\begin{aligned}
\text{Lg } \frac{1}{2} &= 0,6989700 - 1 \\
\text{Lg } \rho &= 9,9991128 - 10 \\
\text{Lg } \pi'' &= 3,5103198 \\
\text{Lg } \cos b &= 9,9304608 - 10 \\
\text{Lg } \sin(L - l) &= 9,8485354 - 10 \\
N &= 0,3051793 \\
\text{Lg } p'' &= 3,2925781 \\
p'' &= 1961'',45 = 32' 41'',45
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Lg } \frac{1}{2}(B - C) &= 2,2355284 \\
\text{Lg } \cos \frac{1}{2}(B + C) &= 9,9999823 - 10 \\
\text{Lg } \cos p &= 9,9999804 - 10 \\
N &= 0,3051793 \\
\hline
\text{Lg } B' &= 2,5406704 \\
B' &= 347'',28 = 5' 47'',28
\end{aligned}$$

Der vergrößerte Halbmesser des Mondes ( $\frac{1}{2}d'$ ) findet sich nun leicht nach §. 189.

$$\begin{aligned}
\text{Lg } \frac{1}{4}d &= 2,6457758 \\
\text{Lg } \cos p &= 9,9999804 - 10 \\
\text{Lg } \cos B' &= 9,9999994 - 10 \\
N &= 0,3051793 \\
\hline
\text{Lg } \frac{1}{2}d' &= 2,9509349 \\
\frac{1}{2}d' &= 893'',17 = 14' 53'',17.
\end{aligned}$$

Um auch den Gebrauch der in dem 190. §. gegebenen Formeln, vermittelt welcher man die Parallaxen, ohne den Neunzigsten vorher zu berechnen, finden kann, setze ich die Berechnung obiger Parallaxen, welche H. Professor Seyffer nach der Methode §. 190. geführt hat. Weil  $\mu$  und  $L > 90^\circ$ , so wird  $\cos \mu$  und  $\cos L$  negativ.

$$\begin{aligned}
\text{Lg } \epsilon &= 9,9991128, - 10 \\
\text{Lg } \pi'' &= 3,5103198 \\
\text{C. Lg } \cos B &= 0,0000211 \\
\hline
&= 3,5094537 \\
\text{Lg } \cos \phi' &= 9,7949451 - 10 \\
\text{Lg } \cos \mu &= 9,7967572 - 10 \\
\hline
\text{Lg } A &= 3,1011560 \\
A &\text{ negativ}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & 3,5094537 \\
 \text{Lg sin } \phi' &= 9,8930395 - 10 \\
 \text{Lg sin } \omega &= 9,6000598 - 10 \\
 \text{Lg } D &= 3,0025530 \\
 D &= 1005'',80
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 3,5094537 \\
 \text{Lg cos } \phi' &= 9,7949451 - 10 \\
 \text{Lg cos } \omega &= 9,9625185 - 10 \\
 \text{L sin } \mu &= 9,8918781 - 10 \\
 \text{Lg } E &= 3,1587954 \\
 E &= 1441'',43
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 3,5094326 \\
 \text{Lg sin } \phi' &= 9,8930395 - 10 \\
 \text{Lg cos } \omega &= 9,9625185 - 10 \\
 \text{Lg } F &= 3,3649906 \\
 F &= 2317'',34
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 3,5094326 \\
 \text{Lg cos } \phi' &= 9,7949451 \\
 \text{Lg sin } \omega &= 9,6000598 \\
 \text{Lg sin } \mu &= 9,8918781 \\
 \text{Lg } G &= 2,7963156 \\
 G &= 625'',62 \\
 F &= 2317,34
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= 1691,72 \text{ wie oben.} \\
 &= R
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Lg } A &= 3,1011560 \\
 \text{Lg sin } L &= 9,4862712 - 10 \\
 \text{Lg } A \sin L &= 2,5874272 \\
 A \sin L &= 386'',747
 \end{aligned}$$

Aa

D=

$$\begin{aligned}
D &= 1005,80 \\
E &= 2441,43 \\
D + E &= 2447,23 \\
\text{Lg}(D + E) &= 3,3886748 \\
\text{Lg} \cos L &= 9,9785944 - 10 \\
\text{Lg}(D + E) \cos L &= 3,3672692 \\
(D + E) \cos L &= -2329,534 \\
A \sin L &= -386,747 \\
P' &= +1942,787 \\
\text{Lg} A &= 3,1011560 \\
\text{Lg} \cos L &= 9,9785944 - 10 \\
\text{Lg} A \cos L &= 3,0797504 \\
A \cos L &= +1201,57 \\
\text{Lg}(D + E) &= 3,3886748 \\
\text{Lg} \sin L &= 9,4862712 - 10 \\
\text{Lg}(D + E) \sin L &= 2,8749460 \\
(D + E) \sin L &= 749,80 \\
A \cos L &= 1201,57 \\
Q' &= 1951,41 \\
\text{oder} &= 32' 31'',4 \\
90^\circ &= 89^\circ 59' 60,0 \\
A &= 89^\circ 27' 28,6 \text{ wie oben}
\end{aligned}$$

Folglich  $N = \text{Lg.} \frac{1}{\cos B (\sin \frac{1}{2} A)^2} = 0,3051793.$

Der übrige Theil der Rechnung wird ganz wie oben geführt, und man findet dieselbe Längenparallaxe und scheinbare Breite.

Berechnung der Zeit der wahren Zusammenkunft des Monds mit der Sonne nach §. 191.

ver-

$$\text{vergröß. Halbm. des Mondes} = 893'',17$$

$$\text{Halbm. der Sonne} = 956,14$$

$$\odot \supset = 1849,31$$

$$B \supset = B' = 347,28$$

$$\text{Summe} = 2196,59$$

$$\text{Untersch.} = 1502,03$$

$$\text{Lg Summe} = 3,3417431$$

$$\text{Lg Untersch.} = 3,1766786$$

$$\text{Lg}(B\odot)^2 = 6,5184217$$

$$\text{Lg } B\odot = 3,2592108$$

$$B\odot = 1816'',4$$

Betrachtet man das Dreyek  $\supset \odot B$  als sphärisch, und rechnet nach der genauen Formel §. 191., so findet sich

$$\text{Lg tang } \frac{1}{2} \text{ Summe} = 7,7262978$$

$$\text{Lg tang } \frac{1}{2} \text{ Untersch.} = 7,5613034$$

$$\text{Lg}(\text{tang } \frac{1}{2} B\odot)^2 = 15,2876012$$

$$\text{Lg tg } \frac{1}{2} B\odot = 7,6438006$$

$$\frac{1}{2} B\odot = 15' 8'',28$$

$$B\odot = 30 16,56$$

$$= 1816'',56$$

$$p - q = 1961,31$$

$$\odot - L = 3777,87$$

$$H = 29' 36'',05$$

$$h = 2 25,75$$

$$H - h = 27 10,30$$

$$= 1630,3$$

$$\begin{aligned}
 \text{Lg } 3600 &= 3,5563025 \\
 \text{Lg } 1650,3 &= 3,2122675 \\
 \text{Lg } m' &= 0,3440350 \\
 \text{Lg } (\odot - L) &= 3,5772471 \\
 &\quad \underline{3,9212821}
 \end{aligned}$$

gehört zu  $8342'',23$   
 $= 2^{\text{St.}} 19' 2'',23$

Anfang um  $21 \ 35 \ 21,76$  mittl. Z.

$\odot \ 23 \ 54 \ 25,99$  mittl. Z.

Vermindert man aber den Abstand der Mittelpunkte um  $6'',5$  wegen der *Irradiation* und *Inflexion* (§. 192.), so erhält man

$$\begin{aligned}
 B \odot &= 1809''95 \\
 \text{und } m' (\odot - L) &= 2^{\text{St.}} 18' 47'',63 \\
 &\quad \underline{21 \ 35 \ 21,76}
 \end{aligned}$$

folglich  $\odot \ 23 \ 54 \ 9,39$  mittl. Zeit.

*Anmerkung.* Gewöhnlich wird der in Zeit verwandelte Unterschied der wahren Längen zu der *wahren* Zeit des Anfangs addirt oder von der *wahren* Zeit des Endes abgezogen, um die *wahre* Zeit der Zusammenkunft zu erhalten. Da aber die stündliche Bewegung des Mondes und der Sonne für *mittlere* Zeit gegeben ist, so kann dieses einen merklichen Fehler in Bestimmung der Zeit der Zusammenkunft machen. In gegenwärtigem Fall würde er  $1'',9$  betragen, weil  $2^{\text{St.}} 18' 47'',63$  mittl. Zeit  $= 2^{\text{St.}} 18' 45'',73$  wahre Zeit. Er kann in gewissen Fällen auf  $3''$  gehen.

Berechnung der Zusammenkunft des Mondes mit der Sonne aus der Beobachtung des *Endes* der Finsterniß in *Harefield*.

$$\begin{aligned}
 \text{Mittl. Zeit d. Endes der Finsterniß} & \ 0 \ 40' 45'',50 \\
 \text{Mitt. Unt. Harefield und Paris} & \ 0 \ 11 \ 16,86 \\
 \text{mittl. Zeit in Paris} & \ 0 \ 52 \ 2,36
 \end{aligned}$$

Für

Für diese Zeit findet sich aus den Elementen.

§. 194.

die wahre Mondlänge =  $163^{\circ} 41' 0'',0 = L$

— — Breite  $\mathfrak{D} = 0 42 20,0 = B$

Horiz. Parall.  $\mathfrak{D} = 0 54 7,7 = \pi$

unter d. Aeq.

Horiz. Parall.  $\odot = 0 0 8,43$

Halbmesser  $\mathfrak{D} = 0 14 44,98 = \frac{1}{2}d$

—  $\odot = 0 15 56,14$

stündl. Bew.  $\mathfrak{D} = 0 29 35,86 = H$

— —  $\odot = 0 2 25,75 = h$

mittlere Länge d.  $\odot = 165 5 42,90$

— Zeit in Gr. =  $10 11 22,5$

$\mu = 175 15 5,4$

$b = 44 8 52$

$l = 150 1 3$

$L = 163 41 0$

$L - l = 13 39 57$

Hieraus Unterschied der Längenparallaxen

$p - q$  oder  $p'' = 9' 14'',09$

scheinb. Breite =  $4 51,60$

vergr. Halbm. d.  $\mathfrak{D} = 14 54,82$

Halbm.  $\odot = 15 56,14$

$30 50,96$

Errad. u. Inflex. —  $6,50$

$30 44,46$

folglich  $B\odot = 1821'',26$

$p - q = 554,09$

$L - \odot = 1267,17$

$$\begin{aligned}
& \text{Lg } m' = 0,3440856 \\
& \text{Lg } 1267,17 = 3,1028350 \\
& \quad \underline{3,4469206} \\
& \text{gehört zu } 2798'',40 \\
& \quad = 0^{\text{St}} 46' 38,4 \\
& \text{beob. Ende } 0 \quad 40 \quad 45,5 \\
& \text{mittl. Zeit der } \sigma \quad 23 \quad 54 \quad 7,1 \\
& \text{Berechnung der Correctionsgleichungen §. 192.} \\
& \text{Lg Abst. d. Mittelp.} = 3,2654782 \\
& \quad \text{Lg } B\Theta = 3,2592115 \\
& \quad \underline{\text{Lg sec. } \psi = 0,0062667} \\
& \quad \text{Lg } m' = 0,3440350 \\
& \text{Lg } m' \text{ sec } \psi = 0,3503017 \\
& \quad m' \text{ sec. } \psi = 2,240 \\
& \quad \text{Lg } B' = 2,5406704 \\
& \quad \quad \underline{3,2592115} \\
& \text{Lg tang } \psi = 9,2814589 - 10 \\
& \quad \text{Lg } m' = 0,3440350 \\
& \text{Lg } m' \text{ tg } \psi = 9,6254939 - 10 \\
& \quad m' \text{ tang } \psi = 0,422 \\
& \text{Ferner ist } B = 33' 55'',7 \\
& \quad B' = 5 \quad 47,3 \\
& \text{Breitenparall.} = 28 \quad 8,4 \\
& \quad = 1688'',4 \\
& \text{Lg } 1688,4 = 3,2274753 \\
& \text{Lg } m' \text{ tg } \psi = 9,6254939 - 10 \\
& \quad \underline{2,8529692} \\
& \text{Lg } \pi'' = 3,5103198 \\
& \quad \underline{0,3426494 - 1}
\end{aligned}$$

$$m' \frac{(p' - q')}{\pi''} \operatorname{tg} \psi = 0,220$$

$$\operatorname{Lg}(p - q) = 3,2925781$$

$$\operatorname{Lg} m' = 0,3440350$$

$$\hline 3,6366131$$

$$\operatorname{Lg} \pi'' = 3,5103198$$

$$\hline 0,1262933$$

$$m' \frac{(p - q)}{\pi''} = 1,337$$

Folglich  $d\vartheta = 2,24 \cdot dS - 0,42 \cdot dB + 1,56 \cdot d\pi''$   
und die mittlere Zeit des wahren Neumonds  
aus dem Anfang

$$23^{\text{u.}} 54' 9'',39 + 2,24 \cdot dS - 0,42 \cdot dB + 1,56 d\pi''.$$

Für das Ende findet sich auf ähnliche Art

$$m' \sec. \psi = 2,24; m' \operatorname{tang} \psi = 0,35;$$

$$m' \frac{(p' - q')}{\pi''} \operatorname{tang} \psi = 0,248; m' \frac{(p - q)}{\pi''} = 0,38$$

also die Zeit der Conjunction aus dem Ende:

$$23^{\text{u.}} 54' 7'',1 - 2,24 \cdot dS + 0,35 \cdot dB + 0,13 d\pi''.$$

Nimmt man aus beyden Bestimmungen das  
Mittel, so erhält man

$$23^{\text{u.}} 54' 8'',24 + 0,00 \cdot dS - 0,03 \cdot dB + 0,84 d\pi''.$$

Hier ist der Coefficient von  $dS = 0$ , also he-  
ben sich die Fehler, welche von der Unge-  
wisshheit der Summe der Halbmesser der Son-  
ne und des Monds herrühren, gänzlich ge-  
gen einander auf, der Coefficient von  $dB$  ist  
ebenfalls so klein, daß der Fehler der Monds-  
tafeln in der Breite, wenn man ihn auch  $= 20''$   
setzen wollte, welches doch schon ein selte-  
ner Fall ist, die Zeit der Conjunction nur um  
 $0'',6$  änderte. Endlich kömmt noch die Ho-  
rizontalparallaxe in Betrachtung, bey welcher  
noch

Berechnung der Parallaxen nach den genauen Formeln §. 188.

$$\begin{aligned}
 \text{Lg } \rho &= 9,9991128 - 10 \\
 \text{Lg } \pi'' &= 3,5103198 \\
 \text{Lg } \cos b &= 9,9304608 - 10 \\
 \text{Lg } \cos(L-l) &= 9,8504304 - 10 \\
 \text{C. Lg } \cos B &= 0,0000211 \\
 &\quad \underline{3,2903449} \\
 &\quad \text{gehört zu } 32' 31'',4 \\
 &\quad \quad \underline{89 \ 59 \ 60,0} \\
 A &= 89 \ 27 \ 28,6 \\
 \frac{1}{2} A &= 44 \ 43 \ 44,3 \\
 2 \text{ Lg } \sin \frac{1}{2} A &= 19,6948418 - 20 \\
 \text{Lg } \cos B &= 9,9999789 - 10 \\
 &\quad \underline{29,6948207 - 30} \\
 \text{C. arith.} &\quad 6,3051793 = N
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Lg } \rho &= 9,9991128 - 10 \\
 \text{Lg } \frac{1}{2} &= 0,6989700 - 1 \\
 \text{Lg } \sin \pi'' &= 8,1958768 \\
 \text{Lg } \cos b &= 9,9304608 - 10 \\
 \text{Lg } \sin(L-l) &= 9,8485354 - 10 \\
 N &= 0,3051793 \\
 \text{Lg } \text{tg } p'' &= 7,9781351 \\
 \left. \begin{array}{l} p'' - q \\ p'' \end{array} \right\} &= 32' 41'',31
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\text{Lg } \varrho &= 9,9991128 - 10 \\
\text{Lg } \pi'' &= 3,5103198 \\
\text{Lg } \sin b &= 9,7188958 - 10 \\
\text{Lg } C &= 3,2283284 \\
C &= 28' 11'',72 \\
B &= 33' 55,70 \\
B - C &= 5' 44,0 \\
B + C &= 62' 7,4 \\
\frac{1}{2}(B - C) &= 2' 52,0 \\
\frac{1}{2}(B + C) &= 31' 3,7 \\
\text{Lg } \sin \frac{1}{2}(B - C) &= 6,9211033 \\
\text{Lg } \cos \frac{1}{2}(B + C) &= 9,9999823 - 10 \\
\text{Lg } \cos p &= 9,9999804 - 10 \\
N &= 0,3051793 \\
\text{Lg } \tan B' &= 7,2262453 \\
B' &= 5' 47'',28
\end{aligned}$$

Vermittelst der Näherungsformeln §. 189 findet man die Längenparallaxe und die scheinbare Breite auf folgende Art:

$N$  findet sich wie oben  $= 0,3051793$ , und ebenso  $C = 28' 11'',72$

$$\begin{aligned}
\text{Lg } \frac{1}{2} &= 0,6989700 - 1 \\
\text{Lg } \varrho &= 9,9991128 - 10 \\
\text{Lg } \pi'' &= 3,5103198 \\
\text{Lg } \cos b &= 9,9304608 - 10 \\
\text{Lg } \sin(L - l) &= 9,8485354 - 10 \\
N &= 0,3051793 \\
\text{Lg } p'' &= 3,2925781 \\
p'' &= 1961'',45 = 32' 41'',45
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 p'' = 0^{\circ} \ 0' 47'',79 \\
 B' = 0 \ 2 \ 17,26 \\
 \frac{1}{2} d' = 0 \ 14 \ 54,18 \\
 \text{Halbm. } \odot = 0 \ 15 \ 56,14 \\
 \hline
 \text{Summe} = 30 \ 50,32 \\
 \text{Irrad. und Inflex.} = \quad 6,50 \\
 \hline
 \quad 30 \ 43,82 \\
 B\odot = 30 \ 38,70 \\
 p'' = 0 \ 47,79 \\
 \hline
 \text{Untersch. d. w. L.} = 29 \ 50,91 \\
 \quad = 1790'',91 \\
 \text{Lg } 1790'',91 = 3,2530737 \\
 \text{Lg } m' = 0,3440883 \\
 \hline
 \quad 3,5971620 \\
 \text{gehört zu } 3955'',14 \\
 = 1^{\text{st}} \ 5' 55'',14 \\
 \quad 1 \ 44 \ 43,40
 \end{array}$$

$\sigma$  um 0 38 48,26 mittl. Zeit.

Ferner findet sich nach §. 192.

$$m' \sec. \psi = 2,2146; \quad m' \tan \psi = 0,1649;$$

$$\frac{m' p'}{\pi'} \tan \psi = 0,1249; \quad \frac{m' p''}{\pi''} = 0,0326.$$

also die mittlere Zeit der Conjunction für den Meridian der Gothaischen großen Sternwarte  
 $0^{\text{h}} 38' 48'',26 - 2,21 \cdot dS. + 0,16 \cdot dB - 0,09 \cdot d\pi''.$

§. 197.

*Bestimmung des Mittagsunterschieds zwischen Gotha und Harefield.*

Nach §. 195. folgt aus der Beobachtung des Endes der Finsterniß in *Harefield* die Zeit des wahren Neumonds:

23<sup>u</sup>.

$23^{\text{U}}. 54' 7'',1 - 2,24. dS + 0,35. dB + 0,13. d\pi''$ .  
aus der Beobachtung des Endes in Gotha nach dem vorhergehenden §.

$0^{\text{U}}. 38' 48'',26 - 2,21. dS + 0,16. dB - 0,09. d\pi''$ .  
der Mittagsunterschied ist = dem Unterschied beyder Zeiten (§. 178.), also  
 $= 44' 41'',16 + 0,03. dS - 0,19. dB - 0,22. d\pi''$ ,  
und zwar liegt Gotha von Harefield gegen *Morgen*, weil die Uhr in Gotha in dem Augenblick der Conjunction mehr zeigte, als die in Harefield. Folglich ist die Länge von Gotha gröfser als die Länge von Harefield.

Hier sind die Coefficienten der Gröfsen  $dS$ ,  $dB$  und  $d\pi''$  so klein, daß die Fehler der Mondstafeln keinen merklichen Einfluß auf die Bestimmung des Mittagsunterschieds haben können, also kann man den Mittagsunterschied zwischen Gotha und Harefield setzen  $= 44' 41'',16$ .

Um den Mittagsunterschied zu finden, welcher herausgekommen wäre, wenn ich bey der Berechnung die Mondsparrallaxe nach Mayer (um  $5''$  gröfser §. 194. Anmerk.) angenommen, und die Inflexion und Irradiation nicht in Rechnung gebracht hätte, seze man in obiger Gleichung für den Mittagsunterschied  $dS = + 6,5$  und  $d\pi'' = + 5'',0$ , so wird der Mittagsunterschied zwischen Harefield und Gotha  $= 44' 41'',16 + 0'',195 - 1'',10$   
 $= 44' 40,26$

Verbindet man aber die aus der Beobachtung des *Anfangs* der Finsterniß in Harefield hergeleitete Zeit des wahren Neumonds (§. 195.) mit der, welche die Beobachtung des Endes  
in

in Gotha gab, so findet man den Mittagsunterschied

$$= 44' 38'',87 - 4,45. dS + 0,58. dB - 1'',65. d\pi''.$$

Hier sind die Coefficienten der unbekannten Gröſſen  $dS$ ,  $dB$  und  $d\pi''$  so groſs, daſs kleine Fehler der bey der Rechnung zu Grund gelegten Elemente den Mittagsunterschied sehr merklich ändern können. Man sieht hieraus, daſs die aus der Verbindung der Beobachtung des Anfangs an dem einen Beobachtungs-Ort mit der Beobachtung des Endes an dem andern, oder umgekehrt, hergeleitete Meridiandifferenz sehr unsicher ist.

Setzt man nun Harefield  $11' 16'',86$  westlich von Paris, so findet man den Mittagsunterschied zwischen *Gotha* und *Paris*  $= 44' 41'',16 - 11' 16'',86 = 33' 24'',3$ . H. von Zach setzt diesen Mittagsunterschied  $= 33' 35''$  (Tab. mot. ☉).

### §. 198.

#### *Vergleichung der Mondstafeln mit den Beobachtungen.*

Aus den §. 194. gegebenen Stücken kann man leicht die Zeit des wahren Neumonds finden. d. 5. September 1793 um  $0^h 0' 0''$  mittlerer Zeit nach dem pariser Meridian war die wahre Länge der Sonne  $= 5^h 13^m 16' 57'',4$ , die wahre Länge des Monds  $= 5^h 13^m 15' 15'',8$ , wovon noch  $7'',0$  abgezogen werden müssen, weil die *Nutation* noch nicht angebracht war. Also hat man

die

die wahre Länge der S. =  $52^{\circ} 13' 16'' 57'',4$

— — — des M. =  $5 \ 13 \ 15 \ 8,8$

Unterschied =  $1 \ 48,6$

Hieraus findet man die Zeit des Neumonds, wenn man diesen Längenunterschied von  $1' 48'',6$  oder  $108'',6$  mit  $m$  (§. 191.) multiplicirt. Nun ist

$$\text{Lg } 108'',6 = 2,0358298$$

$$\text{Lg } m = 0,3440800$$

$$\hline 2,3799098$$

gehört zu  $239'',83$

$$= 3' 59'',8$$

Folglich fiel der wahre Neumond ein, nach dem pariser Meridian d. 5 Sept. 1793 um  
 $0^u. 3' 59'',8$  mittl. Zeit.

Nach den Beobachtungen des H. *Grafen von Brühl* ist die Zeit des wahren Neumonds, mit  $11' 16'',86$  auf Paris reducirt, (§. 195.)

$$0^u. 5' 25'',1$$

Unterschied =  $1 \ 25,3$

Folglich gaben die Tafeln die Zeit des Neumonds zu *früh*. Dividirt man  $1' 25'',27$  oder  $85'',27$  durch  $m$ , so findet man (unter der Voraussetzung, daß der Fehler der Sonnentafeln = 0) den Fehler der Mondstafeln in der Länge =  $38'',6$ , um welchen sie die Länge des Monds zu groß angaben. Die Beobachtung des Herrn *von Zach* mit  $33' 35''$  auf Paris reducirt gibt  $33'',25$ .

*Bestimmung der Zeit der wahren Zusammenkunft durch mikrometrische Messungen.*

§. 199.

Die Beobachtungen des Anfangs und des Endes einer Sonnenfinsterniß geben unmittelbar den Abstand der Mittelpunkte des Mondes und der Sonne. Durch mikrometrische Messungen kann man diesen Abstand während der Dauer der Finsterniß auf mehrere Arten bestimmen, wovon ich hier nur diejenige anführe, welche mir die bequemsten und sichersten zu seyn scheinen. Man mißt mittelst eines Objectivmikrometers \*) Abstände der Hörner oder Sehnen des verfinsterten Theils  $ab$  Fig. 57. Taf. VI. Ist nun  $S$  der Mittelpunkt der Sonne,  $L$  der Mittelpunkt des Mondes, so findet man aus ihrer gemeinschaftlichen Sehne  $ab$  leicht den Abstand der Mittelpunkte  $SL$ . Es ist

$$(Se)^2 = (Sa)^2 - \left(\frac{ae}{2}\right)^2$$

$= (Sa + \frac{1}{2}ae)(Sa - \frac{1}{2}ae)$   
und  $(Le)^2 = (La + \frac{1}{2}ae)(La - \frac{1}{2}ae)$   
über  $Sa$  ist der Halbmesser der Sonne,  $La$  der Halbmesser des Mondes, folglich kennt man  $Se, Le$ , deren Summe dem Abstand der Mittelpunkte gleich ist. Oder man mißt die hellen Theile der Sonne  $AB$  oder den Abstand des Mondrandes vom Sonnenrand, so hat man

$SL$

\*) Kästners astronomische Abhandlungen II. Samml. S. 372. u. f.

$$SL = AB + BL - FS$$

$$= AB + La - Sa$$

Hier ist  $La - Sa$  der Ueberschuß des Mondshalbmessers über den Halbmesser der Sonne, welcher zu dem Abstand des Randes der Sonne von dem in der Sonnenscheibe liegenden Rand des Monds  $AB$  addirt den Abstand der Mittelpuncte gibt. Ist der Halbmesser des Monds kleiner als der Halbmesser der Sonne, so wird ihr Unterschied von dem Abstand  $AB$  abgezogen.

### §. 200.

Wegen der *Strahlenbrechung* müssen die gemessenen Abstände  $ab$ , und  $AB$  verbessert werden. Wäre diese für einen Punct der Sonnenscheibe  $a$  eben so groß als für einen andern Punct derselben  $b$ , so würde der Abstand  $ab$  der wahre seyn. Nun ist aber die Strahlenbrechung für einen Punct  $b$  in einer kleinern Höhe größer, so daß, wenn  $bf$  ein Stück eines Verticalkreises durch  $b$  ist, und  $bb'$  den Unterschied der Strahlenbrechungen für die Puncte  $a$  und  $b$  ausdrückt,  $b'a$  die wahre Sehne des verfinsterten Theils der Sonne seyn wird. Zieht man  $bd$  auf  $ab'$  senkrecht, so ist  $b'd$  die Verkürzung der Sehne durch die Strahlenbrechung. Zieht man durch  $a$  den Verticalkreis  $ac$ ,  $b'c'$  darauf senkrecht, so kann man  $ac$ ,  $b'c$ ,  $bf$ , welches eigentlich Bogen von größten Kreisen sind, hier als gerade Linien, und  $ac$  mit  $fb$  parallel betrachten. Da die Höhen der Puncte  $a$  und  $b$  nicht viel über 30 Min. von einander verschie-

schieden seyn können, so kann man die Unterschiede der denselben zugehörigen Strahlenbrechungen für Höhen, die nicht kleiner als 16 Grade sind, den Höhenunterschieden selbst proportional setzen. Es seye  $\Delta\epsilon$  der Unterschied der Strahlenbrechungen für einen Höhenunterschied  $=ab$ , ungefähr in der Höhe, welche der Mittelpunkt der Sonne hat, so wird der Unterschied der Strahlenbrechungen für den Höhenunterschied  $ac$ , ( $bb'$ ), seyn  $= \frac{ac}{ab} \Delta\epsilon$ , oder, weil  $ab$  von  $ab'$  nur wenig

verschieden ist  $= \frac{ac}{ab'} \Delta\epsilon$ . Nun aber sind die Dreycke  $ac'b'$  und  $bdb'$  einander ähnlich, und es verhält sich

$$bb':b'd = ab':ac$$

$$\text{aber } \Delta\epsilon:bb' = ab':ac$$

$$\text{folglich } \Delta\epsilon:b'd = (ab')^2:(ac)^2$$

Also hat man die Verbesserung des Abstands  $ab$ , d. ist  $db'$

$$= \Delta\epsilon \left( \frac{ac}{ab'} \right)^2$$

Aber  $\frac{ac}{ab'}$  ist der Cosinus des Winkels  $cab'$ , welcher beynahe dem Winkel  $cab$  gleich, den die Richtung, nach welcher man den Abstand  $ab$  genommen hat, mit der Vorticallinie macht. Heißt dieser Winkel  $u$ , so hat man

$$db' = \Delta\epsilon (\cos u)^2.$$

Es gibt Objectivmicrometer, die so eingerichtet sind, daß sie den Winkel  $u$  angeben \*).

Wenn

\*) La Lande Astronomie. T. II, 2446.



Wenn man keine solche Vorrichtung hat, so findet man den Winkel  $u$  am bequemsten durch Zeichnung, weil man ihn nicht sehr genau zu wissen braucht. Man macht einen orthographischen Entwurf \*), der Finsterniß, und bestimmt auf die gewöhnliche Art für den Augenblick der Beobachtung die Lage des Mittelpuncts des Mondes gegen den Mittelpunct der Sonne. Zieht man aus dem Mittelpunct des Projectionskreises eine gerade Linie nach der Stunde und Minute des Parallelkreises, zu welcher man den Abstand gemessen hat, so ist der Winkel dieser Linie mit der Linie, welche die Mittelpuncte der Sonne und des Mondes mit einander verbindet, der Winkel  $u$ , und ihre Länge gleich dem Sinus des Zenithabstandes der Sonne, wenn man den Halbmesser des Projectionskreises zu Sinus totus annimmt. Auf diese Art findet man alles, was zur Berechnung von  $db'$  erfordert wird. Die Verbesserung des Abstands  $AB$  findet sich ebenso, wie für den Abstand  $ab$ , so daß, wenn  $\Delta\varphi$  der Unterschied der Strahlenbrechungen für den Höhenunterschied  $AB$  in der Höhe des Mittelpuncts der Sonne ist, der verbesserte Abstand

$$\begin{aligned} &= AB + \Delta\varphi (\cos BAC)^2 \\ &= AB + \Delta\varphi (\cos u)^2. \end{aligned}$$

Aus dem Abstand der Mittelpuncte findet man alsdann die Zeit der Conjunction auf dieselbe Art, wie aus dem Anfang und dem Ende der Finsterniß.

§. 201.

\*) §. 177.

## §. 201.

Die Sehnen der verfinsterten Theile ändern sich nahe bey dem Anfang und Ende der Finsterniß sehr geschwind, daher man aus denselben den Abstand der Mittelpuncte sehr genau bestimmen kann. Wird der Winkel  $aSe = 45^\circ$ , so ist die Aenderung der Sehne der Aenderung des Abstands der Mittelpuncte gleich. Wird die Sehne noch größer, so ist es vortheilhafter, die GröÙe der hellen Theile der Sonne zu messen, deren Veränderung immer mit derselben Geschwindigkeit geschieht, mit welcher sich der Abstand der Mittelpuncte verändert.

Mißt man zur Zeit der scheinbaren Zusammenkunft des Monds mit der Sonne den Abstand der Mittelpuncte, so ist dieser der scheinbaren Breite des Monds gleich. Diese mit derjenigen, welche man für *denselben* Augenblick aus astronomischen Tafeln gefunden, und nach §. 188. berechnet hat, verglichen, gibt den Fehler der Mondstafeln in der Breite, wenn man die Parallaxe und die Halbmesser des Monds und der Sonne als richtig annimmt.

Da sich der Abstand der Mittelpuncte zur Zeit der scheinbaren Conjunction nur langsam ändert, so kann man die Zeit derselben aus der Berechnung der Sonnenfinsterniß nach den astronomischen Tafeln nehmen. Genauer findet man sie aus der Beobachtung des Anfangs oder des Endes der Sonnenfinsterniß auf folgende Art. In §. 191. drückt *BO* den

den Abstand von der scheinbaren Zusammenkunft *im Bogen* aus, also ist  $m.B\odot$  die Zeit, welche man zu der Zeit der Beobachtung des Anfangs der Finsternis addiren und von der Zeit des Endes abziehen muß, um die Zeit der scheinbaren Conjunction zu haben. So war z. B. oben §, 196. für die Zeit des Endes der Finsternis in Gotha

$$B\odot = 30' 38'',7 = 1838'',7$$

$$\text{Lg } 1838'',7 = 3,2645109$$

$$\text{Lg } m = 0,3440883$$

---


$$3,6085992$$

gehört zu 4060,68

$$= 1^{\text{st.}} 7' 40,68$$

---


$$1 \ 44 \ 43,40 \text{ Ende der Finsternis}$$

---


$$0 \ 37 \ 2,72 \text{ scheinb. } \oslash \odot.$$

Die Breite des Monds, welche bey dieser Rechnung zu Grund gelegt ist, wird zwar als richtig vorausgesetzt; allein der größte Fehler der Mondstafeln in der Breite wird keinen so großen Einfluß auf die Bestimmung der Zeit der scheinbaren Conjunction haben, daß daraus ein beträchtlicher Fehler in der Bestimmung der Mondbreite aus dem nahe bey der scheinbaren Zusammenkunft gefundenen Abstand der Mittelpuncte entstehen könnte.

Zu mehrerer Sicherheit werden gegen die Zeit der scheinbaren Conjunction hin mehrere Abstände genommen, aus welchen man durch Interpolation denjenigen Abstand findet, welcher zu der scheinbaren Conjunction gehört.

## §. 202.

Wenn man von mehreren Orten Beobachtungen des Anfangs und des Endes einer Sonnenfinsternis hat, so kann man daraus den Fehler der Mondstafeln mittelst der Correctionsgleichungen bestimmen. So fand H. Prof. Seyffer \*), welcher verschiedene Beobachtungen der Sonnenfinsternis d. 5. Sept. 1793 berechnete, (mit 5" Summe der Inflexion und Irradiation) folgende Zeiten der wahren  $\odot \odot$ :

Für *Harefield*, Anfang:

$$23^{\text{U}} 54' 16'',80 + 2,25. dS - 0,42. dB + 1,55. d\pi''$$

Ende:

$$23 \quad 53 \quad 59,57 - 2,23. dS + 0,35. dB + 0,13. d\pi''$$

$$\text{Untersch. } 17'',23 + 4,48. dS - 0,77. dB + 1,42. d\pi''$$

Für *Berlin*, Anfang:

$$0^{\text{U}} 49' 28'',58 + 2,22. dS - 0,16. dB + 1,05. d\pi''$$

Ende:

$$0 \quad 49 \quad 10,95 - 2,21. dS + 0,06. dB - 0,04. d\pi''$$

$$\text{Untersch. } 17'',63 + 4,43. dS - 0,22. dB + 1,09. d\pi''$$

Diese Unterschiede müssen  $= 0$  werden, also hat man zwey Gleichungen, aus welchen sich, wenn  $d\pi''$  oder der Fehler der Horizontalparallaxe  $= 0$  gesetzt wird,  $dS = -4'',03$ , und  $dB = -1'',09$  findet. Man sieht leicht, daß alle drey unbekannte Größen bestimmt werden, wenn man von *drey* verschiedenen Orten Beobachtungen des Anfangs und des Endes hat.

## §. 203.

\*) Bestimmung der Länge von Göttingen, Gotha, Danzig etc. Göttingen 1794.

*Bestimmung der Länge aus Bedeckungen der  
Fixsterne vom Mond.*

§. 203.

Die in den vorhergehenden §§. gezeigten Methoden die Länge zu bestimmen sind von der Art, daß immer noch eine Ungewißheit von einigen Secunden übrig bleibt, wenn man nicht aus mehreren Beobachtungen ein Mittel nimmt, weil man den Augenblick, da sich die zur Längenbestimmung gebrauchten Erscheinungen ereignen, nicht mit der erforderlichen Genauigkeit angeben kann. Diesem Fehler sind die Eintritte der Fixsterne an dem dunkeln Mondrande nicht unterworfen, welche so schnell geschehen, daß nichts als einige Uebung des Beobachters dazu erfordert wird, um den Augenblick der Erscheinung anzugeben, und es hat weder die verschiedene Güte der Fernröhren noch die Verschiedenheit der Augen einen Einfluß auf die Beobachtung. Tritt aber der Stern an dem hellen Mondrande ein, so werden schon stärkere Vergrößerungen erfordert, um die Zeit des Eintritts genau angeben zu können. Noch mehrere Aufmerksamkeit erfordert die Beobachtung des Austritts, besonders wenn der Austritt an dem hellen Mondrande geschieht. Um den Augenblick des Austritts nicht zu verfehlen, kann man den scheinbaren Weg des Monds durch Zeichnung bestimmen, und daraus die Stelle des Mondsrandes suchen, an welcher der Stern austritt. Anleitung dazu findet man in den §. 177. angeführten Schriften.

Was aber diese Methode wieder etwas unsicher macht, ist ihre Reduction auf den Mittelpunkt der Erde. Man muß daher die Beobachtungen so mit einander zu verbinden suchen, daß die Unrichtigkeiten der zu jener Reduction erforderlichen Elemente keinen merklichen Einfluß auf die Bestimmung des Mittagsunterschieds haben, welches man am leichtesten beurtheilen kann, wenn man, wie oben §. 192. für die Sonnenfinsternisse gezeigt wurde, die Correctionsgleichungen dazu berechnet.

#### §. 204.

Um aus den Beobachtungen der Fixsternbedeckungen den Mittagsunterschied zu finden, bestimmt man auf ähnliche Art wie oben bey den Finsternissen gezeigt wurde, die Zeit der wahren Zusammenkunft des Monds mit dem Stern. Man berechnet hiezu für den Augenblick der Beobachtung die wahre Länge und Breite des Monds, seine stündliche Bewegung in der Ecliptic, Horizontalparallaxe unter dem Aequator und seinen horizontalen Halbmesser. Hieraus die Längenparallaxe, scheinbare Breite des Monds und seinen vergrößerten Halbmesser. Endlich braucht man noch die scheinbare Breite des Sterns, welcher von dem Mond bedeckt wurde; seine Länge braucht man nicht zu kennen, außer wenn man den Fehler der Mondstafeln in der Länge bestimmen will. Um aus der *mittlern* Länge der Fixsterne, wie man sie aus den Fixsternverzeichnissen findet, die *scheinbare* zu

zu finden, muß man von jener  $17'',85 \sin N$  wegen der Nutation, und  $20'' \cos (* - \odot)$  sec. lat. wegen der \* Aberration abziehen, wenn \* die Länge des Sterns und  $\odot$  die Länge der Sonne bezeichnet. Die Nutation nach der Breite ist  $= 0$ , wegen der Aberration aber muß man zu der mittlern Breite  $20'' \sin (* - \odot) \sin \text{lat. } *$  addiren.

Aus der scheinbaren Breite des Monds, der scheinbaren Breite des Sterns und dem Abstand des Mittelpuncts des Monds von dem Stern, welcher für die Ein- und Austritte dem vergrößerten Halbmesser des Monds gleich ist, findet man ferner leicht den Unterschied der scheinbaren Längen. Es seye Fig. 53. Taf. VI. der Pol der Ecliptic  $E$ ;  $E\odot$ ,  $EB$  zween durch den Stern  $S$  und den Mittelpunct des Monds  $L$  gelegte Breitenkreise, so kennt man in dem sphärischen Dreyek  $ELS$  die drey Seiten  $ES$  (Complement der schein. Breite des Sterns),  $EL$  (Compl. der scheinb. Mondsbreite),  $SL$  (vergr. Halbmesser des Monds). Hieraus findet sich der Winkel  $SEL$ , oder der Unterschied der scheinbaren Längen, vermittelt der bekannten Formel

$$(\sin \frac{1}{2} SEL)^2 = \frac{\sin(P - ES) \sin(P - EL)}{\sin ES \sin EL}$$

wo  $P$  die halbe Summe der drey Seiten des Dreyeks bedeutet.

Zieht man durch den Stern  $S$  den Parallelkreis der Ecliptic  $Sb$ , so ist  $Lb$  der Unterschied der scheinbaren Breiten des Monds und des Sterns,



Sterns, und man findet, wenn diese Gröſſe in die Formel geſetzt wird

$$(\sin \frac{1}{2} SEL)^2 = \frac{\sin \frac{1}{2}(SL - Lb) \sin \frac{1}{2}(SL + Lb)}{\sin ES \sin EL}$$

Weil keine Seite des Dreyeks  $SLb$  größer werden kann als der Halbmesser des Monds, ſo kann man ohne merklichen Fehler ſetzen

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2} SEL)^2 &= \frac{\frac{1}{4}(SL - Lb)(SL + Lb)}{\sin ES \sin EL} = \\ &= \frac{\frac{1}{4}(SL - Lb)(SL + Lb)}{\cos \text{latit.}^* \cos B'} \end{aligned}$$

oder weil  $ES$  und  $EL$  nur wenig von einander verſchieden ſind

$$(SEL)^2 = \frac{(SL - Lb)(SL + Lb)}{(\sin ES)^2}$$

das heißt, man ſieht das ſphäriſche Dreyek  $SLb$  als ein bey  $b$  rechtwinklichtes geradlinigtes Dreyek an, und reducirt den Bogen  $Sb$ , welchen die Auflöſung deſſelben gibt, auf die Ecliptic, indem man ihn durch den Cosinus der Breite des Sterns dividirt oder mit ihrer Secante multiplicirt.

Liegen der Mittelpunkt des Monds und der Stern auf verſchiedenen Seiten der Ecliptic, ſo wird  $Lb =$  der Summe der ſcheinbaren Breiten des Monds und des Sterns.

Aus dem Unterſchied der ſcheinbaren Längen findet man ferner den Unterſchied der wahren Längen vermittelſt der Längenparallaxen und hieraus mit der ſtündlichen Bewegung des Monds die Zeit, welche der Mond gebrauchte, um dieſen Bogen zu durchlau-



laufen, und die Zeit der wahren Zusammenkunft.

Die Correctionsgleichungen werden auf dieselbe Art, wie §. 192. für die Sonnenfinsternisse gezeigt wurde, berechnet, nur muß man die Formel für *nördliche* Breiten des Monds gebrauchen, wenn der scheinbare Ort des Monds zwischen dem Stern und dem Nordpol der Ecliptic liegt, für südliche, wenn der Mond zwischen dem Stern und dem Südpol liegt.

Wenn der Unterschied der scheinbaren Breite des Monds von der scheinbaren Breite des Sterns beynahe dem Halbmesser des Monds gleich wird, so hat ein kleiner Fehler in der wahren Breite des Monds oder des Sterns, so wie in dem Halbmesser des Monds, einen sehr merklichen Einfluß auf die Bestimmung der Zeit der wahren Zusammenkunft. Indessen heben sich doch diese Fehler öfters beynahe gegeneinander auf, wenn man Eintritte mit Eintritten und Austritte mit Austritten verbindet. Um diese Methode durch ein Beyspiel zu erläutern, wende ich sie auf die Bedekung des *Aldebarans* vom Mond d. 27 März 1792 an.

*Anwendung der Methode, die Länge durch Beobachtung der Fixsternbedeckungen zu bestimmen, auf die Bedekung des Aldebarans vom Mond d. 27 März 1792.*

§. 205.

*Mechain* beobachtete in *Paris* den Eintritt des *Aldebarans* an dem dunkeln Mond-

Bb 5

rand

rando d. 27 März um  $8^{\text{U}}. 55' 55'',4$  und den Austritt um  $9^{\text{U}}. 30' 58'',8$  wahrer Zeit. Ich beobachtete den Eintritt um  $9^{\text{U}}. 20' 31'',42$  wahrer Zeit (§. 125.)

Aus den Tafeln in *la Lande's Astronomie* fand ich

1792 März 27.  $9^{\text{U}}. 0' 0''$  mittl. Zeit  
 die wahre Mondsl. =  $67^{\circ} 27' 11'',0 = L$   
 — — Breite d. D =  $4 \ 45 \ 1,9$  südlich.  
 — stündl. Bew. d. D =  $0 \ 30 \ 5,1 = H$   
 Parall. unter d. Aequat. nach la Lande =  $0 \ 54 \ 35,00 = W$   
 nach Mayer =  $0 \ 54 \ 41,75$   
 Zeitgleichung =  $5' \ 7'',72$

$10^{\text{U}}. 0' 0''$   
 die wahre Mondsl. =  $67^{\circ} 57' 16'',0 = L$   
 — — Breite =  $4 \ 46 \ 14,5 = B$   
 — stündl. Beweg. =  $0 \ 30 \ 4,02 = H$   
 Parall. unter d. Aequat. nach la Lande =  $0 \ 54 \ 35,80 = W$   
 nach Mayer =  $0 \ 54 \ 42,55$   
 Zeitgleichung =  $5' \ 6'',95$

### §. 206.

Für die wahre Zeit des Eintritts des Aldebarans in Paris

$8^{\text{U}}. 55' 55'',4$  findet sich aus dem vorhergehenden §.  
 die Zeitgleich.  $+ 5 \ 7,72$   
 $9 \ 1 \ 3,12$  mittl. Zeit der Beobachtung.  
 und für diese Zeit

$L =$

$$\begin{aligned}
 L &= 67^{\circ} 27' 42'',6 \\
 B &= -4 \quad 45 \quad 3,2 \\
 H &= 0 \quad 30 \quad 5,10 \\
 \pi &= 0 \quad 54 \quad 41,75 \\
 \text{hor. Halbm. } \vartheta &= 0 \quad 14 \quad 52,90 \\
 \text{mittl. Länge } \odot &= 5 \quad 57 \quad 37,48 \\
 \text{mittl. Zeit in Gr.} &= 135 \quad 15 \quad 46,8
 \end{aligned}$$

$$\mu = 141 \quad 13 \quad 24,28$$

$$\phi = 48 \quad 50 \quad 12$$

$$\text{Lg tang } \phi = 10,0583375$$

$$\text{Lg } \frac{n^2}{m^2} = 0,9970998 - 1$$

$$\text{Lg tang } \phi' = 10,0554373$$

$$\phi' = 48^{\circ} 38' 49'',15$$

$$\phi = 48 \quad 50 \quad 12,00$$

$$\phi - \phi' = 11 \quad 22,85$$

$$\text{Lg cos } \phi = 9,8183631 - 10$$

$$\text{C. Lg cos } \phi' = 0,1799980$$

$$\text{C. Lg cos } (\phi - \phi') = 0,0000024$$

$$\text{Lg } \epsilon^2 = 9,9983635 - 10$$

$$\text{Lg } \epsilon = 9,9991817 - 10$$

$$\text{Lg cotg } \phi' = 9,9445627$$

$$\text{Lg sin } \mu = 9,7967729$$

$$\text{Lg tang } x = 9,7413356$$

$$x = 28^{\circ} 51' 54'',0$$

$$\omega = 23 \quad 27 \quad 48,0$$

$$\omega + x = 52 \quad 19 \quad 42$$

$$\text{Lg sin } \phi' = 9,8754393$$

$$\text{Lg cos } (\omega + x) = 9,7861376$$

$$\text{C. Lg cos } x = 0,0576151$$

$$\text{Lg sin } b = 9,7191920$$

$$b = 31^{\circ} 35' 22'',7$$

$$\text{Lg tang } (\omega + x) = 10,1123274$$

$$\text{Lg tang } b = 9,7888433$$

$$\text{Lg sin } l = 9,9011707$$

$$\text{gehört zu } 52^{\circ} 47' 40'',4$$

$$179 \quad 59 \quad 60,0$$

$$l = 127 \quad 12 \quad 19,6$$

$$L = 67 \quad 27 \quad 42,6$$

$$L - l = - \quad 59 \quad 44 \quad 37,0$$

$$\text{Lg } \frac{1}{2} \pi = 3,2150755$$

$$\text{Lg } e = 9,9991817 - 10$$

$$\text{Lg } \frac{1}{2} e \pi = 3,2142572$$

$$\text{Lg cos } b = 9,9303487 - 10$$

$$\text{Lg cos } (L - l) = 9,7023187 - 10$$

$$\text{C. Lg cos } B = 0,0014947$$

$$2,8484193$$

$$\text{gehört zu } 705,37$$

$$= 0^{\circ} 11' 45'',37$$

$$44 \quad 59 \quad 60,00$$

$$\frac{1}{2} A = 44 \quad 48 \quad 14,63$$

$$\text{Lg } (\sin \frac{1}{2} A)^2 = 19,6959894$$

$$\text{C. Lg } (\sin \frac{1}{2} A)^2 = 0,3040106$$

$$\text{C. Lg cos } B = 0,0014947$$

$$N = 0,3055053$$

$$\begin{aligned}
 \text{Lg } \frac{1}{2} \varrho &= 9,6981517 - 10 \\
 \text{Lg } \sin \pi &= 8,2016620 \\
 \text{Lg } \cos b &= 9,9303487 - 10 \\
 \text{Lg } \sin (L - l) &= 9,9364028 - 10 \text{ (negativ)} \\
 N &= 0,3055053 \\
 \text{Lg } \tan p &= 8,0720705 \\
 p &= -40' 34'',87. \text{ Längenparall.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Lg } \frac{1}{2} \varrho \pi &= 3,2142572 \\
 \text{Lg } \sin b &= 9,7191920 - 10 \\
 \text{Lg } \frac{1}{2} C &= 2,9334492 \\
 \frac{1}{2} C &= 857'',925 \\
 &= 0^\circ 14' 17'',92 \\
 \frac{1}{2} B &= -2 \quad 22 \quad 31,60 \\
 \frac{1}{2} (B - C) &= -2 \quad 36 \quad 49,52 \\
 \frac{1}{2} (B + C) &= -2 \quad 8 \quad 13,68 \\
 \text{Lg } \sin \frac{1}{2} (B - C) &= 8,6589917 \\
 \text{Lg } \cos \frac{1}{2} (B + C) &= 9,9996978 - 10 \\
 \text{Lg } \cos p &= 9,9999697 - 10 \\
 N &= 0,3055053 \\
 \text{Lg } \tan B' &= 8,9641645 \\
 B' &= -5^\circ 15' 39'',42 \text{ scheinb. Mondsbr. südlich.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Lg } \frac{1}{4} d &= 2,6497728 \\
 \text{Lg } \cos p &= 9,9999697 - 10 \\
 \text{Log } \cos B' &= 9,9981666 - 10 \\
 N &= 0,3055053 \\
 \text{Lg } \frac{1}{2} d' &= 2,9534144 \\
 \text{vergrös. Halbm. d Monds} &= 898'',285
 \end{aligned}$$

Die Breite des Aldebarans d. 27 März 1792  
ist nach *Bradley* und *Mayer* im Mittel

$$= 5^\circ$$

## §. 207.

*Berechnung der Conjunction aus dem Austritt.*wahre Zeit der Beob.  $9^{\text{U.}} 30' 58'',8$ Zeitgleich. =  $+ 5 7,26$ mittlere Zeit =  $9 36 6,06$ 

Für diese Zeit ist

$$L = 67^{\circ} 45' 17'',0$$

$$B = -4 45 45,58$$

$$\pi = 0 54 42,23$$

$$\frac{1}{2}d = 0 14 53,1$$

$$\odot m = 1 59 3,9$$

$$\text{mittl. Z. in Gr.} = 144 1 30,0$$

$$\mu = 150 0 34$$

$$b = 33 51 17,4$$

$$l = 133 33 21,7$$

$$p = -0 41 42,0$$

$$\frac{1}{2}d' = 0 14 57,17$$

$$B' = -5 17 44,4$$

$$m' \sec. \psi = 3,08$$

$$m' \tan \psi = 2,35$$

$$\frac{m' p'}{\pi} \tan \psi = 1,37$$

$$\frac{m' p}{\pi} = -1,52$$

Also ist die mittlere Zeit der Conjunction des  
Monds mit dem Aldebaran aus dem Austritt  
in Paris

$$7^{\text{U.}} 53' 24'',11 - 3,08. dS + 2,35. dB - 2,89. d\pi$$

## §. 208.

## §. 208.

*Berechnung der Conjunction des Monds  
mit dem Aldebaran aus der Beobachtung  
des Eintritts in Altbürg.*

Die wahre Zeit des Eintritts ist

$$9^{\text{U}}. 20' 31'',42 \text{ (§. 125.)}$$

$$\text{Zeitgleichung} + \quad 5 \quad 7,72$$

$$\text{mittl. Zeit} \quad 9 \quad 25 \quad 39,14$$

Mittagsuntersch.

$$\text{von Paris} \quad = 25 \quad 29,80 \text{ *)}$$

$$\text{mittl. Zeit in Paris} \quad 9 \quad 0 \quad 9,34$$

Für diese Zeit findet sich vermittelst der §.  
205. gegebenen Elemente

$$L = 67^{\circ} 27' 15'',6$$

$$\pi = 0 \quad 54 \quad 41,75$$

$$B = -4 \quad 45 \quad 2,1$$

$$\frac{1}{2}d = 0 \quad 14 \quad 52,9$$

$$H = 0 \quad 30 \quad 5,1$$

$$\odot m = 5 \quad 57 \quad 35,3$$

$$\text{mittl. Z. in Gr.} = 141 \quad 24 \quad 27,0$$

$$\mu = 147 \quad 22 \quad 2,3$$

$$\varphi = 48 \quad 43 \quad 26,0$$

$$\varphi' = 48 \quad 32 \quad 2,8$$

$$\text{Lg} \varrho = 9,9991845 - 10$$

$$b = 33 \quad 2 \quad 21,7$$

$$l = 131 \quad 41 \quad 55,6$$

$$p = -0 \quad 41 \quad 36,67$$

$$B' = -5 \quad 16 \quad 28,73$$

$$\frac{1}{2}d' = 0 \quad 14 \quad 57,32$$

*m' sec*

\*) Diesen Mittagsunterschied bestimmte ich durch die  
Bedeckung von  $\alpha$  und  $\delta$  im Stier vom Mond d. 7  
April, 1791. C c

$$\begin{aligned}
 m' \sec \psi &= 3,70 \\
 m' \tan \psi &= 3,12 \\
 \frac{m' p'}{\pi} \tan \psi &= 1,80 \\
 \frac{m' p}{\pi} &= - 1,52
 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die mittlere Zeit der Conjunction

$8^{\text{U}}. 18' 48'', 36 + 3,70. dS - 3,12. dB + 0,28. d\pi.$   
 die Zeit der Conjunction aus dem Eintritt in Paris ist ( $\approx 206.$ )

$7^{\text{U}}. 53' 24,88 + 4,59. dS - 4,10. dB + 0,82. d\pi$   
 also *Altburg* östlicher als *Paris* um  
 $25' 23'', 48 - 0'', 89. dS + 0'', 98. dB - 0'', 54. d\pi.$

#### §. 209.

Die zuletzt gefundene Gleichung für den Mittagunterschied zeigt, wie schon oben §. 204. erinnert wurde, daß diejenigen Occultationen nicht sicher zur Längenbestimmung gebraucht werden können, wo die scheinbare Breite des Monds von der scheinbaren Breite des Sterns viel verschieden ist. Die Coefficienten der Gleichung sind noch so groß, daß kleine Fehler in dem Mondshalbmesser, der Breite des Monds und des Sterns, und in der Horizontalparallaxe des Monds, den Mittagunterschied merklich ändern können. Wird z. B. die Horizontalparallaxe nach *la Lande* um  $6'', 75$  kleiner (§. 205.) angenommen, und von dem Mondshalbmesser für die Inflexion  $3'', 5$  abgezogen, so wird obiger Mittagunterschied  $= 25' 30'', 34$ , wie man sogleich findet, wenn



wenn  $dS = -3'',5$  und  $d\pi = -6'',75$  gesetzt wird. Alsdann fallen aber die aus dem Eintritt und Austritt in Paris hergeleiteten Zeiten der Conjunction sehr verschieden aus. Man findet, wenn in dem Ausdruck für dieselbige (§. 206. u. 207.)  $dS = -3'',5$  und  $d\pi = -6'',75$  gesetzt wird, die Zeit der Conjunction aus dem

$$\text{Eintritt } 7^{\text{u.}} 53' 3'',28 - 4,104. dB$$

$$\text{Austritt } 7 \quad 53 \quad 54,40 + 2,350. dB$$

$$\text{Unterschied} = 51,12 + 6,454. dB$$

Dieser Unterschied verschwindet, wenn  $dB$

$$= -7'',92 \text{ gesetzt wird, weil } \frac{51,12}{6,454} = 7'',92.$$

Wenn also die Parallaxe nach la Lande und die GröÙe  $3'',5$  für die Inflexion richtig sind, und in den Beobachtungen selbst kein Fehler vorgefallen ist, so müÙte man die südliche Mondsbreite um  $8''$  gröÙer annehmen. Da aber auch die Breite des Sterns hiebey in Rechnung kommt, so kann der Fehler zum Theil auch in der Breite des Aldebarans liegen. *Mayer* und *Bradley* geben die Breite desselben um  $2''$  verschieden an.

Wie unsicher in solchen Fällen die Längenbestimmung ist, wenn man Beobachtungen der Eintritte mit Beobachtungen der Austritte, oder umgekehrt, verbindet, siehet man, wenn man die Gleichung für die Conjunction aus dem Austritt in Paris mit der für Altbürg verbindet. Man findet den Mittagsunterschied =

$$25' 24'',25 + 6,78. dS - 5,47. dB + 3,17. d\pi$$

hier könnten kleine Fehler der Mondstafeln

den Mittagsunterschied um ganze Minuten ändern.

Auch die Unebenheiten des Monds können, wenn der Stern so schief an dem Mondrand eintritt, die Zeit des Eintritts um mehrere Secunden ändern.

*Über den Einfluss, welchen verschiedene Voraussetzungen der Abplattung der Erde auf die Längenbestimmung haben.*

§. 210.

Die Parallaxen der Länge und Breite hängen aus einer gedoppelten Ursache von dem Verhältniß ab, welches zwischen dem Halbmesser des Äquators und der halben Erdaxe statt findet. Einmal, weil der Halbmesser der Erde für einen gegebenen Ort (§. 182.) und also auch die Horizontalparallaxe für denselben (§. 187.) sich nach jenem Verhältniß richtet, hernach, weil der Winkel, welchen die Verticallinie des Orts mit dem Halbmesser der Erde macht, durch das Axenverhältniß der Erde bestimmt wird (§. 181.), folglich die verbesserte Breite des Orts ( $\varphi'$ ) verschieden ausfällt, je nachdem die Abplattung der Erde anders angenommen wird.

Um die Veränderungen zu bestimmen, welche die Längen- und Breitenparallaxen leiden, wenn ein anderes Axenverhältniß angenommen wird, kann man sich der Differentialformeln bedienen. Differentiirt man also obige Formel für die verbesserte Breite (§. 181.)

181.) indem man  $\frac{n}{m}$  als veränderlich betrachtet, so erhält man

$$d\phi' (\sec \phi')^2 = \frac{2n}{m} \tan \phi \, d. \frac{n}{m}$$

oder, weil  $\phi'$  von  $\phi$  wenig verschieden ist

$$\begin{aligned} d\phi' &= \frac{2n}{m} \sin \phi \cos \phi \, d. \frac{n}{m} \\ &= \frac{n}{m} \sin 2\phi \, d. \frac{n}{m} \end{aligned}$$

und in Secunden (§. 85. S. 124.) indem man mit  $e$  dividirt

$$d\phi' = \frac{206265. n}{m} \sin 2\phi \, d. \frac{n}{m}$$

Will man  $d\phi'$  durch die verbesserte Breite  $\phi'$  ausdrücken, so setze man oben statt  $\frac{n}{m} \tan \phi$

die Größe  $\frac{m}{n} \cdot \frac{n^2}{m^2} \tan \phi$  oder  $\frac{m}{n} \tan \phi'$ , so wird

$$d\phi' (\sec \phi')^2 = \frac{2m}{n} \tan \phi' \, d. \frac{n}{m}$$

$$d\phi' = \frac{m}{n} \sin 2\phi' \, d. \frac{n}{m}$$

und in Secunden

$$d\phi' = \frac{206265. m}{n} \sin 2\phi' \, d. \frac{n}{m}$$

*Beyspiel.* Oben §. 206. wurde für die Breite der Pariser Sternwarte  $48^\circ 50' 12''$  gefunden  $\phi' = 48^\circ 38' 49'', 15$  unter der Voraus-

setzung  $\frac{n}{m} = \frac{222}{300}$ . Setzt man  $\frac{n}{m} = \frac{223}{300}$ ,  
 so wird  $\phi' = 48^\circ 35' 20'', 81$ , also um  $3' 28'', 5$   
 kleiner. Nach der Differentialformel wird  
 die Rechnung auf folgende Art geführt. Es  
 ist  $\frac{222}{300} = 0,9966667$ , und  $\frac{223}{300} = 0,9956522$ ,  
 kleiner als  $\frac{222}{300}$  um  $0,0010145$ . Also ist hier  
 $d. \frac{n}{m} = - 0,0010145$ ,  $2\phi = 97^\circ 40' 24''$

$$\text{Lg } \frac{n}{m} = 0,9985499 - 1$$

$$\text{Lg } \frac{1}{e} = 5,3144251$$

$$\text{Lg } \sin 2\phi = 9,9960936 - 10$$

$$\text{Lg } d. \frac{n}{m} = 0,0062521 - 3$$

$$\begin{aligned} \text{Lg } d\phi &= \overline{2,3153207} \\ d\phi &= - 206'', 7 = - 3' 26'', 7 \end{aligned}$$

$$\text{Die zweyte Formel } d\phi' = \frac{206265. m}{n} \sin 2\phi.$$

$d. \frac{n}{m}$ , welche genauer ist, gibt

$$d\phi' = - 3' 28'', 25$$

Nach §. 184 ist  $\xi$  sehr nahe =

$$1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right) (\sin \phi)^2$$

$$\text{also } d\xi = d. \frac{n}{m} (\sin \phi)^2$$

folglich ist die Veränderung der Horizontal-  
 parallaxe oder  $d\pi'$

$$= \pi (\sin \phi)^2 d. \frac{n}{m}$$

## §. 211.

Wenn sich die Horizontalparallaxe um  $d\pi$  ändert, so ändert sich die Längenparallaxe um  $\frac{p}{\pi} d\pi$  und die Breitenparallaxe um  $\frac{p'}{\pi} d\pi$  (§. 192.), also ist hier  $dp = p(\sin \varphi)^2 d. \frac{n}{m}$  und  $dp' = p'(\sin \varphi)^2 d. \frac{n}{m}$ . Hieraus findet sich der erste Theil der Veränderung, welche die Parallaxen leiden, wenn  $\frac{n}{m}$  sich ändert. Um auch den zweyten Theil zu finden, welcher von der Veränderung der verbesserten Breite abhängt, differentiire man die Formeln §. 190. indem man  $\varphi'$  als veränderlich betrachtet, so findet man sehr nahe

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\varphi'} = & - \varrho \pi \sec B \cos \mu \sin \varphi' \sin L \\ & - \varrho \pi \sec B \sin \omega \cos \varphi' \cos L \\ & + \varrho \pi \sec B \cos \omega \sin \mu \sin \varphi' \cos L \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } \frac{dp'}{d\varphi'} = & \varrho \pi \sec B \cos \omega \cos \varphi' \\ & + \varrho \pi \sec B \sin \omega \sin \varphi' \sin \mu \end{aligned}$$

In diesen Formeln muß  $\pi$  in Theilen des Halbmessers ausgedrückt, oder der  $\sin \pi$  genommen werden.

Drückt man aber  $\pi$  in Secunden aus, und setzt

$$\begin{aligned} P' = & \varrho \pi \sec. B \cos \omega \sin \mu \sin \varphi' \cos L \\ & - \varrho \pi \sec. B \sin \omega \cos \varphi' \cos L \\ & - \varrho \pi \sec. B \cos \mu \sin \varphi' \sin L \\ R' = & \varrho \pi \sec. B \cos \omega \cos \varphi' \\ & + \varrho \pi \sec. B \sin \omega \sin \varphi' \sin \mu \end{aligned}$$

so findet man

$$dp = \frac{mP''}{n} \sin 2\phi' \cdot d. \frac{n}{m}$$

$$dp' = \frac{mR''}{n} \sin 2\phi' \cdot d. \frac{n}{m}$$

also ist die ganze Veränderung der Längenparallaxe, wenn sich  $\frac{n}{m}$  um  $d. \frac{n}{m}$  ändert,

$$\text{oder } dp = (p(\sin \phi)^2 + \frac{mP''}{n} \sin 2\phi') d. \frac{n}{m}$$

und die Veränderung der Breitenparallaxe  $dp'$

$$= (p'(\sin \phi)^2 + \frac{mR''}{n} \sin 2\phi') d. \frac{n}{m}$$

Kennt man nun  $dp$  und  $dp'$ , so findet man nach §. 192.

$$d\vartheta = m' \cdot dp' \tan \psi + m' \cdot dp$$

$$d\vartheta' = -m' \cdot dp' \tan \psi + m' \cdot dp$$

Ist der scheinbare Ort des Mondes zwischen dem Südpol der Ecliptic und dem Stern, welcher bedeckt wird, so bekommt in beyden Formeln das erste Glied das entgegengesetzte Zeichen.

Bey dem Aufsuchen der trigonometrischen Linien in den Differentialformeln braucht man nicht auf Secunden zu sehen, und es dürfen also keine Proportionaltheile genommen werden. Zur Abkürzung der Rechnung kann man die beyden letzten Ziffern der Logarithmen weglassen.

#### §. 212.

Wendet man die Formeln des vorhergehenden §. auf die obige Berechnung des Eintritts

tritts (§. 206.) an, so findet man die Differentialgleichung wegen der verschiedenen Angaben des Axenverhältnisses auf folgende Art:

$$\begin{aligned} \text{Lg } \rho &= 9,99918 - 10 \\ \text{Lg } \pi &= 3,51610 \\ \text{C. Lg } \cos B &= 0,00149 \\ \text{Lg } \rho \pi \sec. B &= 3,51677 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &3,51677 \\ \text{Lg } \sin \omega &= 9,60012 - 10 \\ \text{Lg } \cos \varphi' &= 9,82000 - 10 \\ \text{Lg } \cos L &= 9,58355 - 10 \\ &2,52044 \\ &\text{geh. zu 331.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &3,51677 \\ \text{Lg } \cos \omega &= 9,96251 - 10 \\ \text{Lg } \cos \varphi' &= 9,82000 - 10 \\ &3,29928 \\ &\text{gehört zu 1992.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also ist } P'' &= 1988 \\ R &= 2607 \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \text{Lg } \frac{m}{n} &= 0,00145 \\ \text{Lg } \sin 2\varphi' &= 9,99647 - 10 \\ \text{Lg } \frac{m}{n} \sin 2\varphi' &= 9,99792 - 10 \\ \text{Lg } P'' &= 3,29848 \\ &3,29640 \\ &\text{gehört zu 1979} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &3,51677 \\ \text{Lg } \cos \omega &= 9,96251 - 10 \\ \text{Lg } \sin \mu &= 9,79678 - 10 \\ \text{Lg } \sin \varphi' &= 9,87544 - 10 \\ \text{Lg } \cos L &= 9,58355 - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &2,73505 \\ &\text{gehört zu 543.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &3,51677 \\ \text{Lg } \cos \mu &= 9,89186 - 10 \\ \text{Lg } \sin \varphi' &= 9,87544 - 10 \\ \text{Lg } \sin L &= 9,96549 - 10 \\ &3,24956 \\ &\text{geh. zu — 1776.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &3,51677 \\ \text{Lg } \sin \omega &= 9,60012 - 10 \\ \text{Lg } \sin \varphi' &= 9,87544 - 10 \\ \text{Lg } \sin \mu &= 9,79678 - 10 \\ &2,78911 \\ &\text{gehört zu 615.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Lg } \frac{m}{n} \sin 2\varphi' &= 9,99792 - 10 \\ \text{Lg } R'' &= 3,41619 \\ &3,41411 \\ &\text{geh. zu 2595} \end{aligned}$$

Die Längenparallaxe  $p$  wurde oben (§. 206.) gefunden  $= -40'34'',87$ , die Breitenparallaxe  $p' = 30'36'',22$ , also ist  $p(\sin \varphi)^2 = -1380$  und  $p'(\sin \varphi)^2 = 1041$ .

Hieraus findet sich

$$dp = -1380. d. \frac{n}{m} + 1979. d. \frac{n}{m} = 599 d. \frac{n}{m}$$

$$\text{und } dp' = 1041. d. \frac{n}{m} + 2595. d. \frac{n}{m} = 3636. d. \frac{n}{m}$$

$$\text{Setzt man } d. \frac{n}{m} = -0,0010145, \text{ (§. 210.)}$$

so wird

$$p = -40' 34'', 87 - 0'', 61 = -40' 35'', 48$$

$$p' = 30' 36'', 22 - 3'', 69 = 30' 32'', 53$$

Man würde diese Parallaxen gefunden haben<sup>\*)</sup>, wenn man bey der Rechnung §. 206. das Newtonsche Axenverhältniß 229 : 230 angenommen hätte. Nach §. 206. ist  $m' \tan \psi = 4,104$  und  $m' = 1,994$ , also die Zeit der Conjunction aus dem Eintritt

$$7^u. 53' 24'', 88 + 1184. d. \frac{n}{m} + 14922 d. \frac{n}{m}$$

oder

$$7^u. 53' 24'', 88 + 16106. d. \frac{n}{m}$$

$$\text{Setzt man } d. \frac{n}{m} = -0,0010145, \text{ so erhält}$$

man die Zeit der Conjunction für  $\frac{1}{230}$  Abplattung  $7^u. 53' 8'', 54$ , also  $16'', 34$  früher, als mit  $\frac{1}{260}$  Abplattung. Auf dieselbe Art findet sich für

<sup>\*)</sup> Durch unmittelbare Berechnung der Parallaxen nach §. 188. fand ich mit  $\frac{1}{230}$  Abplattung die Längenparallaxe  $= -40' 35'', 47$ , die scheinbare Breite  $= -5^\circ 15' 35'', 74$ , also die Breitenparall.  $= 30' 32'', 54$ .



für die Zeit der Conjunction aus meiner Beobachtung (§. 208.)

$$P' = 2050$$

$$R' = 2525$$

$$\left. \begin{array}{l} p = -2496,67 \\ p' = 1886,63 \end{array} \right\} \text{§. 208.}$$

folglich

$$dp = (2050 - 1410) d. \frac{n}{m} = 6040. d. \frac{n}{m}$$

und

$$dp' = (2525 + 1065) d. \frac{n}{m} = 3590. d. \frac{n}{m}$$

ferner ist nach §. 208.  $m' = 1,994$  und  $m' \tan \psi = 3,12$ , also die Zeit der Conjunction aus dem Eintritt in *Altburg*

$$8^u. 18' 48'',36 + 12405. d. \frac{n}{m} + 1204. d. \frac{n}{m}$$

oder

$$8 \ 18 \ 48,36 + 12405. d. \frac{n}{m}$$

für *Paris*

$$7 \ 53 \ 24,88 + 16106. d. \frac{n}{m}$$

---


$$25 \ 23,48 - 3701. d. \frac{n}{m}$$

folglich ist, wenn  $d. \frac{n}{m} = -0,0010145$  ge-

setzt wird, der Mittagsunterschied zwischen Altburg und Paris

$$= 25' 27'',22$$

Man

Man sieht, daß sich hier die Fehler, welche von der Ungewißheit der Abplattung herrühren, zum Theil gegeneinander aufheben.

Man erhält also folgende Mittagsunterschiede zwischen der Pariser Sternwarte und Altburg:

Mayers Parall. ohne Inflex.	$\frac{1}{308}$ Abpl.	§. 208.	25' 23",48
L. Lande's Parall. mit Inflex.	$\frac{1}{308}$ Abpl.	§. 209.	25 30,34
— — — — —	$\frac{1}{218}$ Abpl.		25 34,08
Mayers Parall. ohne Inflex.	$\frac{1}{310}$ Abpl.		25 27,22
Mayers Parall. mit Inflex.	$\frac{1}{218}$ Abpl.		25 30,33

### §. 213.

Wenn der Mittagsunterschied zweyer Orte genau bestimmt ist, so kann man aus Bedekungen von Fixsternen, die an beyden Oertern sind beobachtet worden, die Abplattung der Erde bestimmen. Denn es wird diejenige Abplattung die richtigste seyn, welche den aus Occultationen hergeleiteten Mittagsunterschied mit dem auf andere Art schon bestimmten am besten übereinstimmend darstellt. Es wird zwar bey dieser Untersuchung die Breite des Monds, sein Halbmesser, seine Parallaxe und die Breite des Sterns als richtig angenommen, allein die kleinen Fehler, welche hier noch statt haben können, heben sich, wenn aus vielen Beobachtungen ein Mittel genommen wird, gegeneinander auf. Herr von Zach hat zuerst diese Methode vorgeschlagen \*), und H. Triesnecker \*\*) ähnliche Untersuchungen über diejenige Abplattung, welche

\*) Astron. Jahrbuch für 1794. S. 202. u. f.

\*\*) Ephemerides astronomicae anni 1791. Viennae 1790. pag. 387. et seq.

che die aus dem Anfang und Ende der Sonnenfinsternisse hergeleiteten Zeiten der wahren Conjunction des Mondes mit der Sonne mit einander übereinstimmend macht, angestellt. Er berechnete die Zeit der wahren Conjunction nach drey Hypothesen, indem er die Abplattung zu  $\frac{1}{230}$  und  $\frac{1}{335}$  annahm, und die Irradiation und Inflexion  $-6'',5$  in Rechnung brachte, mit der Abplattung  $\frac{1}{335}$  auch ohne Irradiation und Inflexion. Nach der §. 211. gegebenen Formel kann diese Untersuchung viel kürzer gemacht werden, weil man durch dieselbe die Zeit der Conjunction, die man nach einer gewissen Hypothese berechnet hat, sogleich auf eine andere reduciren kann. Der Mittagsunterschied  $\Delta$  wird durch eine Formel von der Form ausgedrückt

$$\Delta' \pm \varepsilon. d. \frac{n}{m} \quad (\S. 212.)$$

in welcher  $\Delta'$  und  $\varepsilon$  gegeben ist. Ist nun der Mittagsunterschied beyder Orte bekannt, so hat man

$$\pm \varepsilon. d. \frac{n}{m} = \Delta - \Delta'$$

$$\text{also} \quad d. \frac{n}{m} = \pm \frac{\Delta - \Delta'}{\varepsilon}$$

folglich das Axenverhältniß, welches beyde Bestimmungen miteinander übereinstimmend

macht  $= \frac{n}{m} \pm d. \frac{n}{m}$ , wenn  $\frac{n}{m}$  das bey

der Rechnung zum Grund gelegte Axenverhältniß ist.

*Bestimmung der Länge durch Abstände des Monds von der Sonne und von Fixsternen.*

§. 214.

Wenn man die Mondstafeln als richtig voraussetzt, so kann man für eine jede gegebene Zeit den wahren Abstand des Monds von der Sonne oder einem Fixstern, dessen Länge und Breite bekannt ist, finden. Der Augenblick, da der Mond einen solchen Abstand erreicht, wird die Zeit nach dem Meridian desjenigen Orts seyn, für welchen man den Abstand berechnet hat. Aus dem wahren Abstand des Monds von der Sonne oder einem Fixstern kann man also finden, wie viel Uhr es in dem Augenblick, da man den Abstand beobachtete, an dem Ort war, für welchen der Abstand vorausist berechnet worden. Hat nun der Beobachter die wahre Zeit nach dem Meridian seines Orts bestimmt, da der Abstand genommen wurde, so ist der Unterschied der wahren Zeit der Beobachtung und der Zeit, für welche der Abstand berechnet wurde, der Mittagsunterschied beyder Orte.

Der Abstand, welchen man durch Beobachtung findet, muß wegen der Strahlenbrechung und Parallaxe auf den wahren, wie er in dem Mittelpunct der Erde erscheinen würde, reducirt werden. Wie die wahre Zeit der Beobachtung bestimmt wird, ist schon oben (§. 109. u. f. §. 169. u. f.) gezeigt worden.

§. 215.

## §. 215.

*Den Abstand des Monds von der Sonne  
oder einem Fixstern zu messen.*

Das beste Instrument zu dieser Absicht ist der Spiegelsextant, und die Art, wie man damit Abstände mißt, von der Art, wie Höhen gemessen werden (§. 78.), im Wesentlichen nicht verschieden. Weil das Licht der Sonne weit stärker ist als das Licht des Monds, so ist es vortheilhafter, durch die Fernröhre gerade zu nach dem Mond zu sehen, und das Bild der Sonne durch gedoppelte Reflexion in das Sehefeld der Fernröhre zu bringen, nachdem man die Blendungsgläser bey *Z* Fig. 29. Taf. VI. vorgeschoben hat, wie dieses an dem Glas *a b* gezeit ist. Wird der Abstand des Monds von der Sonne gegen Abend genommen, so muß der Sextant verkehrt gehalten werden. Um das Bild des Monds hell genug zu machen, wird die Fernröhre vermittelst der Schraube *S* in die Höhe geschraubt, wodurch ein größerer Theil des Objectivs Stralen gerade zu erhält. Mißt man Abstände des Monds von Fixsternen, so richtet man die Fernröhre nach letzteren, und bringt das Bild des Monds durch Reflexion in das Sehefeld, nachdem man, um das Licht des Monds etwas zu schwächen, das hellste grüne Glas bey *Z* vorgeschoben hat. Es gehört viele Uebung dazu, den Sextanten in die Ebene der beyden Punkte zu bringen, zwischen welchen man die Abstände messen will. Wenn man den Abstand beynahe kennt, so kann  
man

man die Alhidade vorher auf diesen Abstand stellen. Sieht man nun durch die Fernröhre gerade zu nach der Sonne, so darf man nur den Sextanten um die Axe der Fernröhre drehen, so daß man die Sonne immer in dem Sehfeld behält, um das Bild des Monds ebenfalls in das Sehfeld zu bringen. Nun ist es leicht die einander nächsten Ränder der Sonne und des Monds mittelst der Mikrometerschraube *K* zur Berührung zu bringen, wobei alles das zu bemerken ist, was bereits oben §. 78. und 79. bey Höhenmessungen erinnert worden ist.

### §. 216.

#### *Bestimmung des wahren Abstands aus dem scheinbaren.*

Es seye Fig. 58. Taf. VII. *Z* das Zenith, *L* der scheinbare Ort des Monds, *L'* der wahre, also *LL'* die Wirkung der Höhenparallaxe und Refraction; *S* die scheinbare Lage des Gestirns, von welchem man den Abstand gemessen hat, und *S'* der wahre Ort desselben, so ist *LS* der scheinbare und *L'S'* der wahre Abstand des Monds von dem Gestirn *S*. Es seye

die scheinbare Höhe des Monds	=	<i>h</i>
— wahre — — —	=	<i>h'</i>
— scheinbare Höhe des Gestirns	=	<i>H</i>
— wahre — — —	=	<i>H'</i>
der scheinbare Abstand <i>LS</i>	=	<i>D</i>
— wahre — <i>L'S'</i>	=	<i>D'</i>

so hat man, weil der Winkel  $LZS$  beyden Dreycken  $LZS$  und  $L'ZS'$  gemeinschaftlich ist

$$\text{I. } \cos LZS = \frac{\cos D - \sin h \sin H}{\cos H \cos h}$$

$$\text{II. } = \frac{\cos D' - \sin h' \sin H'}{\cos H' \cos h'}$$

Es ist aber  $\cos(H+h) = \cos H \cos h - \sin h \sin H$

$$\text{folglich } \frac{\cos(H+h)}{\cos H \cos h} = 1 - \frac{\sin h \sin H}{\cos h \cos H}$$

$$\text{daher } \frac{\sin h \sin H}{\cos h \cos H} = 1 - \frac{\cos(H+h)}{\cos h \cos H}$$

$$\text{und ebenso } \frac{\sin h' \sin H'}{\cos h' \cos H'} = 1 - \frac{\cos(H'+h')}{\cos h' \cos H'}$$

folglich

$$\frac{\cos D + \cos(H+h)}{\cos h \cos H} = \frac{\cos D' + \cos(H'+h')}{\cos h' \cos H'}$$

ferner ist

$$\cos(H+h) + \cos D = 2 \cos \frac{1}{2}(H+h+D) \cdot \cos \frac{1}{2}(H+h-D)$$

$$\cos D' = 1 - 2(\sin \frac{1}{2} D')^2$$

$$\cos(H'+h') = 2(\cos \frac{1}{2}(H'+h'))^2 - 1$$

$$\text{folglich } \cos D' + \cos(H'+h') = 2(\cos \frac{1}{2}(H'+h'))^2 - 2(\sin \frac{1}{2} D')^2$$

also

$$\frac{\cos h' \cos H'}{\cos h \cos H} \cos \frac{1}{2}(H+h+D) \cdot \cos \frac{1}{2}(H+h-D) = (\cos \frac{1}{2}(H'+h'))^2 - (\sin \frac{1}{2} D')^2$$

$$\text{daher ist } (\sin \frac{1}{2} D')^2 = (\cos \frac{1}{2}(H'+h'))^2$$

$$- \frac{\cos h' \cos H'}{\cos h \cos H} \cos \frac{1}{2}(H+h+D) \cdot \cos \frac{1}{2}(H+h-D)$$

Man seze

$$\frac{\cos h' \cos H' \cos \frac{1}{2}(H+h+D) \cdot \cos \frac{1}{2}(H+h-D)}{\cos h \cos H (\cos \frac{1}{2}(H'+h'))^2} = (\sin A)^2$$

D d

so

so hat man

$$(\sin \frac{1}{2} D')^2 = (\cos \frac{1}{2} (H' + h'))^2 (1 - \sin A^2)$$

folglich

$$\sin \frac{1}{2} D' = \cos \frac{1}{2} (H' + h') \cos A. *)$$

### §. 217.

Da  $\cos(H-h) = \cos H \cos h + \sin H \sin h$

$$\text{so ist auch } \frac{\sin H \sin h}{\cos H \cos h} = \frac{\cos(H-h) - 1}{\cos H \cos h} - 1$$

und ebenso

$$\frac{\sin H' \sin h'}{\cos H' \cos h'} = \frac{\cos(H'-h') - 1}{\cos H' \cos h'} - 1$$

folglich, wenn man diese Werthe in die Gleichungen I. u. II. des vorhergehenden §. setzt

$$\frac{\cos D - \cos(H-h)}{\cos H \cos h} = \frac{\cos D' - \cos(H'-h')}{\cos H' \cos h'}$$

also  $\cos D' = \cos(H'-h')$

$$- \frac{\cos H' \cos h'}{\cos H \cos h} (\cos(H-h) - \cos D)$$

Nun ist  $H'$  die wahre,  $H$  die scheinbare Höhe der Sonne oder des Sterns, und man findet für

$H$	$\frac{\cos H'}{\cos H}$
10	1,000268
20	1,000272
30	1,000274
40	1,000276
50	1,000277
60	1,000277
70	1,000278

Man

\*) Diese Formel gibt Borda, *Descript. et us. du cercle de reflex.* pag. 76. et 77.



Man kann also für Höhen der Sonne oder des Sterns über  $10^\circ$   $\frac{\cos H'}{\cos H}$  als beständig an-

nehmen, und die Werthe von  $\frac{\cos h' \cos H'}{\cos h \cos H}$

in eine Tafel bringen, welche die scheinbare Höhe und Horizontalparallaxe des Monds zu Argumenten hat. Eine solche Tafel findet man in den *Requisite Tables* pag. 8. et seq. die man auch bey der *Borda'schen* Formel gebrauchen kann. Um nach der in diesem §. gegebenen Formel, welche *Dunthorn* vorgeschlagen hat, den wahren Abstand zu berechnen, ziehe man von dem Cosinus des Unterschieds der scheinbaren Höhen den Cosinus des scheinbaren Abstands ab, (ist dieser  $> 90^\circ$  so wird der Cosinus desselben addirt) und multiplicire den Rest mit 1,000275.  $\frac{\cos H'}{\cos H}$ ,

welche GröÙe man mit der scheinbaren Mondshöhe und seiner Horizontalparallaxe in der Tafel findet. Der Unterschied zwischen diesem Product und dem Cosinus des Unterschieds der wahren Höhen ist der Cosinus des wahren Abstands.

### §. 218.

Für den Augenblick der Beobachtung muß also die wahre und scheinbare Höhe des Monds und der Sonne oder des Fixsterns bekannt seyn. Diese Stüke erhält man, wenn drey Beobachter zugleich die Höhe des Monds, die Höhe der Sonne oder des Sterns und den

Abstand messen. Die Sonnen- oder Sternhöhe gibt die wahre Zeit der Beobachtung, (§. 169.) und man hat keine Uhr zu diesen Beobachtungen nöthig. Will aber nur *ein* Beobachter die Länge durch Mondstanzanzen bestimmen, so muß er mit einer Secundenuhr versehen seyn, mit der Messung einer Sonnenhöhe oder Sternhöhe und der Höhe des Monds den Anfang machen, dann einen Abstand nehmen, hierauf wieder eine Sonnenhöhe oder Sternhöhe beobachten, und endlich die Höhe des Monds messen; bey jeder Beobachtung wird die Zeit der Uhr bemerkt. Da man nun die scheinbare Höhe der Sonne und des Monds für eine gewisse Zeit der Uhr und ihre Veränderung in der Zwischenzeit der Beobachtungen kennt, so kann man durch Interpolation die Höhe der Sonne oder Sterns und des Monds für die Zeit finden, welche die Uhr in dem Augenblick zeigte, da der Abstand genommen wurde, und auf diese Art die Beobachtungen auf drey *gleichzeitige* reduciren.

Zu Land, wo man diese Beobachtungen mit mehrerer Bequemlichkeit als zur See machen kann, wird folgende Methode die vorzüglichste seyn. Die Uhr wird durch correspondirende Höhen oder auf andere Art berichtigt, um die wahre Zeit der Beobachtungen angeben zu können. Man nimmt mehrere Abstände, und bemerkt bey jeder Beobachtung die Zeit der Uhr. Da man in kleinen Zwischenzeiten die Veränderungen des Abstands der Zeit proportional sezen kann, so nimmt man aus den Abständen und aus den  
 Zei-

Zeiten der Beobachtungen ein Mittel, um für eine gewisse Zeit den scheinbaren Abstand des Monds von der Sonne oder dem Fixstern mit mehrerer Genauigkeit zu erhalten. Vermittelt der geschätzten Länge sucht man aus Ephemeriden für den Augenblick der Beobachtung die gerade Aufsteigung und Abweichung der Sonne und des Monds, so kann man für die bekannte wahre Zeit der Beobachtung die wahre Höhe der Sonne und des Monds berechnen. Hieraus findet man vermittelt der Tafeln für die Strahlenbrechung und Parallaxe die scheinbaren Höhen, indem man zuerst die Höhenparallaxen von den wahren Höhen abzieht, diese Höhen als wahre betrachtet, und die ihnen zugehörigen Strahlenbrechungen dazu addirt. Hiebey ist zu bemerken, daß man, weil die Tafeln für die Strahlenbrechungen und Parallaxen gewöhnlich auf scheinbare Höhen gestellt sind, zuerst mit der wahren Höhe die Parallaxe, vermittelt dieser und der wahren Höhe eine *genäherte* scheinbare Höhe suchen muß, um die Höhenparallaxe genau zu finden. Ist die Höhenparallaxe groß, so muß man die Operation noch einmal wiederholen. Dasselbe ist bey der Strahlenbrechung zu bemerken. Um die scheinbare Höhe des Monds leichter zu finden, hat man Tafeln berechnet, welche die Unterschiede der Höhenparallaxen und Refractionen enthalten.

## §. 219.

*Anwendung der Methode, die Länge durch Abstände des Monds von der Sonne zu bestimmen.*

Herr von Zach beobachtete d. 10. Sept. 1792. \*) früh auf der Sternwarte auf dem Seeberg folgende 4 Abstände des Monds von der Sonne:

8 <sup>U</sup> . 1' 15,5	wahrer Zeit	67° 32' 0"
- 2 50,5	—	— 31 30
- 4 13,5	—	— 31 0
- 5 37,5	—	— 30 30
<hr/>		
8 3 29,2	—	— 31 15
Mittel.	Error ind	+ 5 35

scheinb. Abst. der Ränd.  $\odot \ominus = 67 \ 36 \ 50$

Um 8<sup>U</sup>. 3' 29",2 wahrer Zeit in Gotha war es 7<sup>U</sup>. 29' 54" w. Z. in Paris, und man findet für diese Zeit aus der *Connoissance des temps* für 1792

die gerade Aufsteig. d.  $\odot = 169^{\circ} \ 9' \ 15''$   
 — — — d.  $\odot = 100 \ 41 \ 30$   
 Unterschied = 68 28 45

die

\*) Astron. Jahrbuch für 1795. S. 254.

die Abweich. d.  $\mathfrak{D} = 17^{\circ} 59' 50''$  nördlich

— — d.  $\odot = 4 \ 40 \ 15$  —

die Horiz. Parall.  $\mathfrak{D}$

für Paris  $= 0 \ 54 \ 11 = \pi$

für Gotha  $= 0 \ 54 \ 10,6$  mit  $\frac{1}{388}$  Abpl

Horiz. Halbm.  $\mathfrak{D} = 0 \ 14 \ 48$

Halbm.  $\odot = 0 \ 15 \ 57,4$

wahre Zeit in Gr.  $= 59 \ 7 \ 42$

Untersch. der ger. Auf-

steig. des  $\mathfrak{D}$  und der  $\odot = 68 \ 28 \ 45$

Stundenw. des  $\mathfrak{D} = 9 \ 21 \ 3$  gegen Abend

Breite von Seeberg  $= 50 \ 56 \ 17$

Berechnung der Höhen des Monds und der  
Sonne nach §. 171.

I. Höhe des Monds.

$\text{Lg cotang } \phi = 9,9093290$

$\text{Lg cost} = 9,9941904$

$\text{Lg tang } M = 9,9035194$

$M = 38^{\circ} 41' 15''$

Abw. d.  $\mathfrak{D} = 17 \ 59 \ 50$

$M + \delta = 38 \ 41 \ 5$

// 56

$\text{Lg sin } (M + \delta) = 9,9220301$

$\text{Lg sin } \phi = 9,8901221$

C.  $\text{Lg cos } M = 0,1075900$

$\text{Lg sin } H' = 9,9197422$

wahre Höhe des  $\mathfrak{D} = 56^{\circ} 13' 46'' = H'$

Die zu der wahren Höhe  $H'$  gehörige Höhen-  
parallaxe  $\eta$  findet man, wenn man keine Ta-  
feln hiezu hat, vermittelt der Formel §. 82.  
S. 117.

Dd 4

tang

$$\text{tang } q = \frac{\sin \pi \cos H'}{1 - \sin \pi \sin H'}$$

oder, wenn  $90^\circ - \pi \sin H' = A$  gesetzt wird

$$\text{tang } q = \frac{\sin \pi \cos H'}{2 (\sin \frac{1}{2} A)^2}$$

oder beynahe

$$q = \frac{\frac{1}{2} \pi \cos H'}{(\sin \frac{1}{2} A)^2}$$

Hier ist  $\text{Lg } \frac{\pi}{2} = 3,2109335$

$$\text{Lg } \sin H' = \frac{9,9197422}{3,1306757}$$

gehört zu  $= 1351''$

$$= 0^\circ 22' 31''$$

$$\frac{44 \ 59 \ 60}{\phantom{000}}$$

$$\frac{1}{2} A = \frac{44 \ 37 \ 29}{\phantom{000}}$$

$$\text{Lg } (\sin \frac{1}{2} A)^2 = 19,6932436$$

$$\text{C. ar.} = 0,3067564$$

$$\text{Lg } \frac{1}{2} \pi = 3,2109335$$

$$\text{Lg } \cos H' = \frac{9,7449721}{\phantom{000}}$$

$$\text{Lg } q = 3,2626620$$

$$q = 1831'' = 0^\circ 30' 31''$$

$$H' = \frac{56 \ 13 \ 46}{\phantom{000}}$$

$$\frac{55 \ 43 \ 15}{\phantom{000}}$$

$$\text{Refr. } + \quad 39$$

$$\text{scheinb. Höhe d. } \mathfrak{D} = 55 \ 43 \ 54 = H$$

## II. Höhe der Sonne.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Lg cotg } \varphi & = & 9,9093290 \\
 \text{Lg cost} & = & 9,7102163 \\
 \hline
 \text{Lg tang } M & = & 9,6195453 \\
 M & = & 22^\circ 36' 30'' \\
 \text{Abw. der } \odot & = & 4 \ 40 \ 15 \\
 M + \delta & = & 27 \ 16 \ 45 \\
 \text{Lg sin } (M + \delta) & = & 9,6611749 \\
 \text{Lg sin } \varphi & = & 9,8901221 \\
 \text{C. Lg cos } M & = & 0,0347257 \\
 \text{Lg sin } h' & = & 9,5860227 \\
 \text{wahre Höhe der } \odot & = & 22^\circ 40' 29'',0 \\
 \text{Taf. V. Parall.} & & -0 \ 7,8 \\
 \hline
 & & 22 \ 40 \ 21,2 \\
 \text{Refract. } + & & 2 \ 15,6 \\
 \hline
 \text{scheinb. Höhe d. } \odot & = & 22 \ 42 \ 37 = h \\
 \text{Horiz. Halbm. des } \mathfrak{D} & = & 14' 48'' \\
 \text{Vergröß.} & = & 12 \\
 \hline
 \text{vergr. Halbm. des } \mathfrak{D} & = & 15 \ 0 \\
 \text{Halbm. d. } \odot & = & 15 \ 57 \\
 \hline
 & & 30 \ 57 \\
 \text{Abst. d. Ränder} & = & 67 \ 36 \ 50 \\
 \hline
 \text{scheinb. Abst. der} & & \\
 \text{Mittelpuncte} & & 68 \ 7 \ 47 = D
 \end{array}$$

Hieraus findet sich der wahre Abstand der Mittelpuncte der Sonne und des Monds nach der *Borda'schen* Formel §. 216.

$$\begin{array}{rcl}
 D = & 68^{\circ} 7' 47'' & \\
 h = & 22 \ 42 \ 37 & \text{C. Lg cos} = 0,0350483 \\
 H = & 55 \ 48 \ 54 & \text{C. Lg cos} = 0,2494381 \\
 \hline
 S = & 146 \ 34 \ 18 & \\
 \frac{1}{2}S = & 73 \ 17 \ 9 & \text{Lg cos} = 9,4587848 \\
 \frac{1}{2}S - D = & 5 \ 9 \ 22 & \text{Lg cos} = 9,9982391 \\
 h' = & 22 \ 40 \ 29 & \text{Lg cos} = 9,9650644 \\
 H' = & 56 \ 13 \ 46 & \text{Lg cos} = 9,7449721 \\
 \hline
 H' + h' = & 78 \ 54 \ 15 & \text{Summe} = 39,4515468 \\
 & & \text{Halfte} = 19,7257734 \\
 \frac{H' + h'}{2} = & 39 \ 27 \ 7,5 & \text{Lg cos} = 9,8877061 \\
 & & \text{Lg sin } A = 9,8380673 \\
 & & A = 43^{\circ} 31' 45'' \\
 & & \text{Lg cos } A = 9,8603123 \\
 \text{Lg cos} \left( \frac{H' + h'}{2} \right) = & 9,8877061 & \\
 & & \text{Lg sin } \frac{1}{2}D' = 9,7480184 \\
 & & \frac{1}{2}D' = 34^{\circ} 2' 36'',25 \\
 & & D' = 68 \ 5 \ 18,5
 \end{array}$$

Nun muß man noch bestimmen, wie viel Uhr es an einem Ort, dessen Länge bekannt ist, in dem Augenblick war, da der wahre Abstand des Mondes von der Sonne  $68^{\circ} 5' 18'',5$  betrug.

Nach der *Connoissance des temps* war d. 10 Sept. 1792 Morg. der Abstand der Sonne und des Mondes um

$$\begin{array}{rcl}
 6^{\text{U.}} \ 0' \text{ wahrer Zeit} & = & 68^{\circ} 45' 50'' \\
 9 \ 0 \ \text{---} \ \text{---} & = & 67 \ 24 \ 28 \\
 \hline
 \text{Untersch. } 3^{\text{St.}} \ 0 & & 1 \ 21 \ 22 \\
 \text{oder } 10800'' & & \text{oder } 4882''
 \end{array}$$

Der



Der Abstand  $68^{\circ} 5' 18'',5$  fällt zwischen diese beyde, und ist von dem ersten um  $40' 31'',5$  oder  $2431'',5$  verschieden, folglich ist die Zeit  $x$  in Secunden ausgedrückt, welche man zu der Zeit des ersten Abstands addiren muß, um die Zeit zu haben, da der Abstand =

$$68^{\circ} 5' 18'',5 \text{ war, } = \frac{10800 \cdot 2431,5}{4882}$$

$$\text{Lg } 10800 = 4,0334238$$

$$\text{Lg } 4882 = 3,6885978$$

$$\hline 0,3448260$$

$$\text{Lg } 2431,5 = 3,3858743$$

$$\text{Lg } x = 3,7307003$$

$$x = 5379'',0$$

$$= 1^{\text{st.}} 29' 39'',0$$

$$\text{Zeit d. erst. Abstands } 6 \quad 0 \quad 0,0 \quad \text{Z}$$

Folglich ist  $7 \quad 29 \quad 39,0$  die Zeit nach dem Pariser Meridian, da nach den astronomischen Tafeln der Abstand des Mondes von der Sonne =  $68^{\circ} 5' 18'',5$  war. Die wahre Zeit der Beobachtung in Gotha ist:

$$8^{\text{u.}} \quad 3 \quad 29$$

$$\text{Mittagsunterschied} = \frac{\quad \quad \quad}{33 \quad 50}$$

*Verbesserung wegen der abgeplatteten Gestalt der Erde.*

### §. 220.

Es ist schon oben §. 181. gezeigt worden, daß die Verlängerung einer geraden Linie aus dem Mittelpunkt der Erde an den Ort des Beobachters nicht den Punct der scheinbaren Him-

Himmelskugel trifft, wo die Richtung der Schwere hinfällt. Es seye also  $HO$  Fig. 59. Taf. VII. der Horizont des Beobachters,  $Z$  der Scheitelpunct, wo die Richtung der Schwere hintrifft,  $Z'$  der Punct, wo der verlängerte Halbmesser der Erde an dem Ort des Beobachters hintrifft, so ist ein durch die Puncte  $Z, Z'$  gelegter größter Kreis der Meridian des Orts (§. 181.), und der Punct  $Z'$  liegt von dem Scheitelpunct  $Z$  gegen *Süden*, wenn der Beobachter sich auf der nördlichen Halbkugel befindet, gegen *Norden*, wenn der Beobachter auf die südliche Halbkugel gesetzt wird.

Nun seye  $L'$  der wahre Ort des Monds, und  $ZL'$  ein größter Kreis, so liegt der scheinbare Ort des Monds in diesem Kreis in  $L$ , und man hat, wenn  $\pi$  die Horizontalparallaxe für den Aequator, und  $\varrho$  der Halbmesser der Erde an dem Ort des Beobachters in Theilen des Halbmessers des Aequators ausgedrückt ist

$$\sin L'L = \varrho \sin \pi \sin Z'L \quad (\S. 82. \text{ u. } 187.)$$

Zieht man die Scheitelkreise  $ZL'$  und  $ZL$ , so ist  $ZL'$  der wahre,  $ZL$  der scheinbare Abstand des Monds vom Scheitel.  $HZL'$  das wahre Azimuth des Monds (von Mittag an gerechnet),  $HZL$  das scheinbare. Folglich wird der Mond durch die Parallaxe aus dem Scheitelkreis gerückt um den Winkel  $L'ZL$ , welcher die Azimuthalparallaxe ist. Man mache  $Zl = ZL'$ , so ist  $Ll$  die Höhenparallaxe. Zieht man  $Z'p$  auf  $ZL$  senkrecht, so hat man, weil der Bogen  $ZZ'$  klein ist (§. 181.)

$Zp$

$$Z'p = ZZ' \sin HZL = \Delta\phi \sin a$$

$$Zp = ZZ' \cos HZL = \Delta\phi \cos a$$

wenn  $\Delta\phi =$  dem Winkel, welchen der Halbmesser der Erde mit der Richtung der Schwere macht, und  $a =$  dem Azimuth.

Weil nun  $Z'p$  klein ist, so hat man sehr nahe  $Z'L = pL = ZL - Zp$

folglich  $\sin L'L = \rho \sin \pi \sin (ZL - Zp)$

$$= \rho \sin \pi \sin ZL \cos Zp -$$

$$\rho \sin \pi \sin Zp \cos ZL$$

da nun  $Zp$  nicht größer werden kann als  $ZZ'$  oder ungefähr ein Vierteltheilsgrad, so kann der Fehler, welcher aus der Voraussetzung  $\cos Zp = 1$  in der Höhenparallaxe entsteht, nicht über  $0'',05$  betragen, und man hat

$$\sin L'L = \rho \sin \pi \sin ZL - \rho \sin \pi \sin Zp \cos ZL$$

$$= \rho \sin \pi \sin ZL - \rho \sin \pi \cos ZL \cdot \Delta\phi \cos a$$

das ist, wenn die scheinbare Mondshöhe  $= H$  gesetzt wird

$$\sin L'L = \rho \sin \pi \cos H - \rho \sin \pi \sin H \cdot \Delta\phi \cos a$$

oder beynahe

$$LL' = \rho \pi \cos H - \pi \cdot \Delta\phi \sin H \cos a$$

Der Winkel  $Z'LZ$  bleibt beständig klein, weil mit der Höhe des Monds das Azimuth  $HZL$  abnimmt, und gegen dem Aequator hin, wo der Mond beynahe vertical aufsteigt, der Bogen  $ZZ'$  sehr klein und unter dem Aequator selbst  $= 0$  wird, folglich hat man die *Höhenparallaxe*  $Ll = \rho \pi \cos H - \pi \cdot \Delta\phi \sin H \cos a$ , wo  $\Delta\phi$  in Theilen des Halbmessers ausgedruckt ist. Man muß also von der Höhenparallaxe wie man sie vermittelt der Horizontalparallaxe für den Ort der Beobachtung und mit dem Abstand des Monds vom Scheitel findet,

(§. 219.)

(§. 219.) abziehen  $\pi \cdot \Delta\phi \sin H \cos a$  Secunden, indem man  $\Delta\phi$  in Theilen des Halbmessers, und  $\pi$  in Secunden ausdrückt.

Um die *Azimuthalparallaxe*  $L'ZL$  zu finden, suche man den Winkel  $Z' LZ$ ; dieser findet sich durch die Proportion

$$1 : \sin pL = \text{tang } Z' LZ : \text{tang } Z' p$$

und man hat sehr nahe

$$Z' LZ = \frac{Z' p}{\sin pL} = \frac{\Delta\phi \sin a}{\sin (H - \Delta\phi \cos a)}$$

Ferner ist beynahe

$$L'l = \frac{L'L \cdot Z' p}{\sin ZL} = \frac{L'L \cdot \Delta\phi \sin a}{\cos H}$$

$$\text{und } L'ZL = \frac{L'l}{\sin ZL'} = \frac{L'L \cdot \Delta\phi \sin a}{\cos H \cos H'}$$

$$\text{aber } \epsilon\pi = \frac{L'L}{\cos H}$$

folglich ist die Azimuthalparallaxe

$$L'ZL = \frac{\epsilon\pi \Delta\phi \sin a}{\cos H'}$$

oder, weil  $\epsilon$  beynahe  $= 1$ , und  $L'ZL$  sehr klein ist

$$L'ZL = \frac{\pi \Delta\phi \sin a}{\cos H'}$$

Weil man hier  $\Delta\phi$  nicht sehr genau zu wissen braucht, so kann man in der Reihe für  $\phi - \phi'$  oder  $\Delta\phi$  (§. 183.) die Glieder, welche das Quadrat und höhere Potenzen von  $a$  enthalten, weglassen, und man hat  $\Delta\phi = a \sin 2\phi$

$$= \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2} \sin 2\phi = \frac{(m + n)(m - n)}{m^2 + n^2} \sin 2\phi.$$

Aber  $m$  und  $n$  sind wenig von der Einheit verschieden-

schieden, also hat man beynahe  $\Delta \varphi =$

$$\left(1 - \frac{n}{m}\right) \sin 2\varphi = \alpha \sin 2\varphi, \text{ wenn } \alpha \text{ die Ab-}$$

plattung der Erde ist. Folglich ist

$$\text{die Höhenparallaxe} = \rho \pi \cos H - \alpha \pi \sin 2\varphi \sin H \cos a$$

$$\text{die Azimuthalparallaxe} = \frac{\alpha \pi \sin 2\varphi \sin a}{\cos H'}$$

Mayer gab diese Formeln in seinen *Tabulis motuum* ☉ et ☽ pag. CII. Edit. 1770.

### §. 221.

Man sieht aus dem bisherigen, daß der wahre Abstand, den man unter der Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde berechnet, aus zwey Ursachen von demjenigen verschieden ist, welcher wirklich bey der sphäroidischen Gestalt der Erde statt findet. Die Höhenparallaxe wird zu *groß* gefunden, wenn das Azimuth  $a$  von Mittag an gerechnet *kleiner* ist als  $90^\circ$ , und zu *klein*, wenn das Azimuth *größer* ist, und die Voraussetzung, welche oben bey der Berechnung des wahren Abstands angenommen wurde, daß der Winkel  $L'ZS'$  Fig. 58. durch die Parallaxe nicht geändert werde, ist ebenfalls nicht in aller Schärfe wahr. Dem ersten Fehler wird abgeholfen, wenn man bey der Berechnung der scheinbaren Höhe aus der wahren von der nach §. 219. oder 82. berechneten Höhenparallaxe  $\alpha \pi \sin 2\varphi \sin H \cos a$  Sec. abzieht, und diese verbesserte Höhenparallaxe zur Bestimmung der scheinbaren Höhe gebraucht. Um die Veränderung zu berechnen, welche der Abstand durch die Veränderung des Winkels  $L'ZS'$  leidet, kann

kann man sich der Differentialformeln bedienen. Man hat nach §. 216.

$$\cos L Z S = \frac{\cos D - \sin h \sin H}{\cos H \cos h}$$

$$\text{also } -d. L Z S. \sin L Z S = \frac{-d. D \sin D}{\cos H \cos h}$$

$$\text{folglich } d. D = \frac{d. L Z S. \sin L Z S \cos H \cos h}{\sin D}$$

Da nun das Azimuth von Mittag an gerechnet durch die Parallaxe immer kleiner wird, so ist  $d. L Z S$  negativ, wenn der Mond und die Sonne oder der Fixstern auf verschiedenen Seiten des Mittagskreises liegen, oder wenn der Mond weiter von dem Meridian absteht, als die auf derselben Seite des Meridians liegende Sonne, und positiv, wenn beyde Himmelskörper auf derselben Seite des Mittagskreises liegen, der Mond aber dem Meridian näher ist als die Sonne oder der Fixstern. Heißt nun das Azimuth des Mondes  $a$ , das Azimuth der Sonne oder des Fixsterns  $a'$ , so ist  $L Z S = a \pm a'$ , wenn die Azimuthe von Mittag gegen Abend oder Morgen gerechnet werden. Also ist  $d. D = \frac{-\alpha \pi \sin 2 \phi \sin a \sin (a \pm a') \cos H \cos h}{\sin D \cos H'}$

Weil die Parallaxe der Sonne sehr klein ist, so ist die von der Azimuthalparallaxe der Sonne herrührende Veränderung unmerklich.

Für die mittlere Horizontalparallaxe des Mondes  $= 57'$  und  $\alpha = \frac{1}{300}$  wird  $\alpha \pi = 11'',4$  also hat man, da  $\alpha \pi$  so klein ist,

$$d D = - \frac{11'',4 \sin 2 \phi \sin a \sin (a \pm a') \cos h}{\sin D}$$

Da

Da man die Abweichung, Stundenwinkel und Höhe des Monds und der Sonne schon kennt, so findet man daraus leicht die Azimüthe.

In der 46. Figur Taf. IV ist  $Z$  der Scheitelpunct,  $P$  der Pol,  $S$  der Ort der Sonne, und es verhält sich

$$\sin ZS : \sin ZPS = \sin PS : \sin PZS$$

$$\cos h' : \sin t = \cos \delta : \sin a'$$

$$\text{also ist } \sin a' = \frac{\sin t \cos \delta}{\cos h'}$$

Ebenso findet man, wenn  $T'$  der Stundenwinkel des Monds,  $H'$  seine wahre Höhe und  $\Delta$  seine Abweichung ist, das Azimuth des Monds  $a$  durch die Formel

$$\sin a = \frac{\sin T' \cos \Delta}{\cos H'}$$

§. 222.

*Die Borda'sche Formel für die Verbesserung des wahren Abstands.*

Es seye  $p$  die Horizontalparallaxe für einen Ort, dessen Breite  $= \lambda$ , so ist der Halbmesser der Erde für diesen Ort  $= 1 - \alpha \sin \lambda^2$  (§. 184.) so ist die Horizontalparallaxe  $\pi$  unter dem

Aequator  $= \frac{p}{1 - \alpha \sin \lambda^2}$  (§. 187.). Die Brei-

te des Orts der Beobachtung seye  $= L$ , so ist die Horizontalparallaxe für denselben  $=$

$$\pi (1 - \alpha \sin L^2) = p \cdot \frac{1 - \alpha \sin L^2}{1 - \alpha \sin \lambda^2} =$$

$$= p (1 + \alpha \sin \lambda^2 - \alpha \sin L^2).$$

$AE$  Fig. 60. Taf. VII. seye der Halbmesser des Aequators,  $AQ$  die halbe Axe der Erde,  
Ee
de,



de,  $OA$  der Halbmesser der Erde an dem Ort des Beobachters,  $OZ$  die verlängerte Richtung der Schwerkraft, also  $Z$  des Beobachters Scheitelpunct;  $Z'O$  der verlängerte Halbmesser der Erde, folglich  $ZZ'$  ein Stück des Meridians  $= \alpha \sin 2L$  (§. 220.)  $L$  der Ort des Mondes, allein durch die Strahlenbrechung verbessert,  $S$  der wahre Ort des Gestirns, mit welchem man den Mond vergleicht. Aus den Puncten  $Z$  und  $Z'$  ziehe man die Bogen  $ZL$  und  $ZS$ ,  $Z'L$  und  $Z'S$ . Trägt man auf den Bogen  $ZL$  den Bogen  $Lp =$  dem Product der Horizontalparallaxe für den Ort  $O$  in den  $\sin Z'L$ , und zieht den Bogen  $Sp$ , so ist  $Sp$  der wahre Abstand beyder Gestirne, wenn man auf die abgeplattete Gestalt der Erde Rücksicht nimmt. Man mache auf dem Bogen  $ZL$  den Bogen  $LL' = p(1 + \alpha \sin^2 L + \alpha \sin L^2) \sin ZL$  und ziehe  $SL'$ , so ist klar, daß, wenn man den wahren Abstand nach §. 216. unter der Voraussetzung der Kugelgestalt der Erde mit der Horizontalparallaxe  $= p(1 + \alpha \sin^2 L + \alpha \sin L^2)$  berechnet hätte, man für den wahren Abstand  $L'S$  würde gefunden haben. Zieht man aus  $S$  die Bogen  $opn$  und  $L'm$ , so ist  $L'o = L'S - pS$ .

$$\begin{aligned} \text{Es seye } LZ &= a; SZ = b; LS = D \\ LZ' &= a'; SZ' = b'; L'S = D' \\ pS &= D'' \end{aligned}$$

so wird man haben  $D' - D'' = Lo$ , oder  $D'' = D' - Lo$ ; statt  $Lo$  kann man  $mn$ , welches sehr wenig davon verschieden ist, nehmen. Man wird also haben

$$D'' = D' - mn = D' - Ln + Lm$$

Nun



Nun hat man  $Ln = Lp \cdot \cos Z'LS$ , aber

$$Lp = p(1 + \alpha \sin \lambda^2 - \alpha \sin L^2) \sin a'$$

$$\text{und } \cos Z'LS = \frac{\cos Z'S - \cos LZ' \cos LS}{\sin LZ' \sin LS}$$

$$= \frac{\cos b' - \cos a' \cos D}{\sin a' \sin D}$$

folglich ist

$$Ln = p(1 + \alpha \sin \lambda^2 - \alpha \sin L^2) \left( \frac{\cos b' - \cos a' \cos D}{\sin D} \right)$$

Auf dieselbe Art findet man  $Lm = LL' \cos ZLS$ , und da nach der Voraussetzung

$$LL' = p(1 + \alpha \sin \lambda^2 + \alpha \sin L^2) \cdot \sin a, \text{ und}$$

$$\cos ZLS = \frac{\cos b - \cos a \cos D}{\sin a \sin D}$$

so erhält man

$$Lm = p(1 + \alpha \sin \lambda^2 + \alpha \sin L^2) \left( \frac{\cos b - \cos a \cos D}{\sin a \sin D} \right)$$

Nimmt man den Unterschied zwischen  $Ln$  und  $Lm$ , und setzt für  $a'$ ,  $a + da$ , und für  $b'$ ,  $b + db$ , so findet sich

$$Ln - Lm = -2p\alpha \sin L^2 \left( \frac{\cos b - \cos a \cos D}{\sin D} \right)$$

$$+ p \left( \frac{da \sin a \cos D - db \sin b}{\sin D} \right)$$

Man mache  $LZ = Lq$  und ziehe  $Zq$ , so hat man  $da = qZ' = ZZ' \cos ZZ'q = \alpha \sin 2L \cos ZZ'q$ . Um den  $\cos ZZ'q$  zu finden, ziehe man aus dem Pol  $P$  den Bogen  $PZ$ , welcher der Aequatorshöhe, und den Bogen  $PL$ , welcher der Polardistanz des Mondes gleich seyn wird  $= N$ .  $PZL$  ist wenig von  $ZZ'L$  verschieden, also kann man ohne merklichen Fehler setzen  $qZ' = \alpha \sin 2L \cos PZL$ .

Ee 2

Aber

$$\begin{aligned}\text{Aber } \cos PZL &= \frac{\cos PL - \cos PZ \cos ZL}{\sin PZ \sin ZL} \\ &= \frac{\cos N - \sin L \cos a}{\cos L \sin a}\end{aligned}$$

$$\text{folglich } da = \alpha \sin 2L \left( \frac{\cos N - \sin L \cos a}{\cos L \sin a} \right)$$

Ebenso erhält man, wenn die Polardistanz  $PS$  des Gestirns  $S=M$  gesetzt wird,

$$db = \alpha \sin 2L \left( \frac{\cos M - \sin L \cos b}{\cos L \sin b} \right)$$

Setzt man endlich diese Werthe in den oben gefundenen Ausdruck für  $D''$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned}D'' &= D + 2p\alpha \sin L^2 \left( \frac{\cos b - \cos a \cos D}{\sin D} \right) \\ &\quad + p\alpha \sin 2L \left( \frac{\cos M - \sin L \cos b}{\cos L \sin D} \right) \\ &\quad - p\alpha \sin 2L \cos D \left( \frac{\cos N - \sin L \cos a}{\cos L \sin D} \right) \\ &= D + 2p\alpha \sin L \left( \frac{\cos N - \cos D \cos M}{\sin D} \right) \\ &= D + 2p\alpha \sin L \left( \frac{\cos N}{\sin D} - \cotg D \cos M \right) \\ &= D + 2p\alpha \sin L \left( \frac{\cos N}{\sin D} + \tan (D - 90^\circ) \cos M \right)\end{aligned}$$

Man berechne also den Abstand  $D'$  nach §. 216. oder 217. mit der Horizontalparallaxe  $p(1 + \alpha \sin^2 L + \alpha \sin L^2)$ , oder, wenn die Aequatorialparallaxe  $\pi$  heisst, mit der Horizontalparallaxe  $\pi(1 + \alpha \sin L^2)$  und addire zu dem gefundenen Abstand  $D'$

$$2p\alpha \sin L \left( \frac{\cos N}{\sin D} = \cotg D \cos M \right)$$

Da sich die Größe  $p\alpha$  nicht merklich ändert, so nehme man statt  $p$  die mittlere Mondsparrallaxe  $= 57'$ ; man wird alsdann haben

$$\begin{aligned} 2p\alpha &= 34'' \quad \text{für } \frac{1}{200} \text{ Abplattung} \\ &= 29'',5 \quad - \quad \frac{1}{230} \quad - \\ &= 22,8 \quad - \quad \frac{1}{300} \quad - \end{aligned}$$

§. 223.

*Anwendung auf das §. 219. gegebene  
Beispiel.*

Mit  $\frac{1}{300}$  Abplattung findet man, da  $\lambda = 48^\circ 50'$  und  $L = 50^\circ 56'$ ,

$$\begin{aligned} p\alpha \sin \lambda^2 &= 6'',5 \\ p\alpha \sin L^2 &= 6,9 \\ &\underline{13'',4} \end{aligned}$$

$$\text{Horiz. Par. für Paris} = \underline{54. 11,0} \\ 54. 24,4$$

Hienach ist die Höhenparallaxe  $LL'$  (Fig. 60.)  $= 30' 38'',4$  und die scheinbare Höhe  $H = 55^\circ 43' 46''$ , woraus man nach §. 219. findet  $D' = 68^\circ 5' 4'',4$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \text{Lg } 22,8 &: \dots\dots\dots 1,35793 \\ \text{Lg sin. der Breite. } 50^\circ 56' &\dots\dots\dots 9,89012 - 10 \\ \text{Lg sin. d. Abweich. } \odot \quad 4 \quad 40 &\dots\dots\dots 8,91040 - 10 \\ \text{C. Lg sin. d. Abstands. } 68 \quad 5 &\dots\dots\dots 0,03258 \\ \hline \text{Summe} &= 0,19103 \\ \text{Zahl} &= 1'',5 \end{aligned}$$

Lg

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Lg } 22,8 & \dots\dots\dots & 1,35793 \\
 \text{Lg sin. d. Breite} & \dots\dots & 9,89012 + 10 \\
 \text{Lg sin d. Abw. d. D. } 18^\circ 0' & \dots\dots & 9,48998 - 10 \\
 \text{Lg tang } (90^\circ - D) & \text{od. } -21^\circ 55' & \dots\dots 9,60459 - 10 \\
 & (D - 9^\circ) & \\
 \text{Summe} & = & 0,34262 \\
 \text{Zahl} & = & -2,2 \\
 \text{Verbess.} & = & -0,7 \\
 \text{wahrer Abstand} & = & 68^\circ 5' 3'',7
 \end{array}$$

Hieraus erhält man den Mittagsunterschied zwischen der Sternwarte auf dem Seeberg bey Gotha und Paris nach §. 219.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Abstand um } 6^h 0' 0'' & = & 68^\circ 45' 50'',0 \\
 \text{beob. Abst.} & = & 68 \quad 5 \quad 3,7 \\
 \text{Untersch.} & = & 40 \quad 46,3 \\
 & = & 2446,3 \\
 \text{Lg. } \frac{10000}{2446,3} & = & 0,3448260, (\S. 219.) \\
 \text{Lg } 2446,3 & = & 3,3885097 \\
 & & \underline{3,7333357} \\
 & & 5411'',7 \\
 & = & 1^h 30' 11'',7 \\
 & & \underline{6 \quad 0 \quad 0,0} \\
 & & 7 \quad 30 \quad 11,7 \\
 \text{Zeit der Beob.} & 8 \quad 3 \quad 29,2 & \\
 \text{Mittagsuntersch.} & 33 \quad 17,5 &
 \end{array}$$

Dieser weicht nur  $17''$  von Herrn v. Zachs Bestimmung  $33' 35''$  ab \*).

§. 224.

\*) H. Nieuwland fand (Johrb. für 95. S. 254.) den wahren Abstand  $= 68^\circ 5' 3''$  und daraus die Länge, wie es dort heisst, bis auf  $7''$ . Da mein Abstand mit jenem sehr nahe zutrifft, und ich nach dem Nautical Almanac dieselbe Länge (Paris und Greenwich  $9' 20''$ ) gefunden habe, so ist dies wahrscheinlich ein Druckfehler.

## §. 224.

Da bey dieser Methode, die Länge zu bestimmen, der wahre Ort des Monds nach den Tafeln als richtig vorausgesetzt wird, so kann der Fehler der Mondstafeln einen merklichen Einfluß auf die Längenbestimmung haben. Macht man aber viele Bestimmungen zu verschiedenen Zeiten, so kann man, wenn ein Mittel aus allen genommen wird, schon gewiß so genaue Resultate erhalten, als durch die Verfinsterungen der Jupiterstrabanten. Diese Methode ist auch deswegen bequem, weil man Mondsabstände zu allen Zeiten (nur wenige Tage in jedem Monat ausgenommen) beobachten kann.

Die Abstände des Monds von der Sonne können weit genauer beobachtet werden, als Abstände von Fixsternen, weil man das Berühren der Ränder mit vieler Schärfe wahrnehmen kann. Aus diesem Grunde sind jene vorzüglich zur Längenbestimmung zu empfehlen.

## §. 225.

Nach aller Schärfe könnte man den wahren Abstand aus dem scheinbaren unter der Voraussetzung der sphäroidischen Gestalt der Erde auf folgende Art herleiten. Die berechneten \*) wahren Höhen verwandle man in schein-

\*) Die wahren Höhen werden vermittelt der Breite, so wie man sie aus den Beobachtungen findet, auf die schon oben gezeigte Art berechnet.

scheinbare, indem man allein die Strahlenbrechung in Rechnung bringt, und berechne nach §. 216 den reducirten Abstand, welchen man allein von der Strahlenbrechung befreit erhalten wird. Nun berechne man mit der verbesserten oder geocentrischen Breite, dem Stundenwinkel und Abweichung die wahren Abstände des Monds und der Sonne vom Zenith; diese werden  $Z'p$  und  $Z'S$  Fig. 60 seyn. Vermittelst dieser Zenithdistanzen suche man, indem man die Horizontalparallaxe für den Ort des Beobachters gebraucht, die Höhenparallaxe  $Lp$ , so hat man auch den scheinbaren Abstand vom Zenith  $Z'L$ . Ebenso suche man auch die Höhenparallaxe und den scheinbaren Abstand der Sonne vom Zenith  $Z'$ . Berechnet man nun mit diesen letztern wahren und scheinbaren Höhen und dem schon wegen der Strahlenbrechung verbesserten Abstand noch einmal den reducirten Abstand nach §. 216, so erhält man den auch von der Parallaxe befreiten Abstand, und man hat genau den wahren Abstand  $pS$ , wie er in dem Mittelpunct der Erde erscheinen würde.

*Bestimmung der Länge durch tragbare Uhren.*

§. 226.

Es erhellt aus den bisherigen Untersuchungen, daß weder die Finsternisse des Monds und der Jupiterstrabanten noch die Bedekungen der Fixsterne vom Mond und Ab-  
stän-

stände des Mondes von der Sonne und von Fixsternen eine so genaue Bestimmung der Länge verstatten, als man die Breite eines Orts, wenn man auch nicht mit sehr vorzüglichen Instrumenten versehen seyn sollte, bestimmen kann. Die größe Vollkommenheit, mit welcher jezo tragbare Uhren verfertigt werden, hilft den Schwierigkeiten, welchen die Längenbestimmung sonst unterworfen war, grölstentheils ab, und die Methode, die Länge durch genaue tragbare Uhren zu bestimmen, ist nicht allein die genaueste, sondern auch die leichteste und bequemste unter allen bisher bekannten. Ausser der Längen-Uhr hat man nichts als ein Instrument zum Höhenmessen nöthig, um die Uhr berichtigen zu können. Dieses Instrument dient zugleich zur Bestimmung der Breite, und so kann man einen Ort in kurzer Zeit mit wenigen Werkzeugen nach Länge und Breite bestimmen. Nur Schade, daß der hohe Preis diese Uhren nicht in so vieler Beobachter Hände kommen läßt, als für die Verbesserung der Geographie zu wünschen wäre.

Will man durch eine Uhr die Länge bestimmen, so muß sie nach der Zeit eines Orts, mit dem man andere in Absicht auf die Länge vergleichen will, berichtet seyn, welches nach den oben angezeigten Methoden geschieht. Um vermittelst dieser Uhr zu jeder andern Zeit die Zeit des Orts, mit der man sie verglichen hat, angeben zu können, muß ihr *Gang* bekannt seyn, das heißt, man muß wissen, wie viel sie sich täglich von der mittlern Zeit entfernt. Dieser Gang muß, ehe

noch mit der Längenbestimmung der Anfang gemacht wird, sehr sorgfältig untersucht werden, indem man sich der Methoden bedient, welche schon oben bey der Berichtigung der Pendeluhrn gezeigt wurden. Man setzt die Beobachtungen wenigstens einen Monat hindurch fort, um den *mittlern* täglichen Gang der Uhr mit der gehörigen Genauigkeit (welche von der Grösse des Zeitraums, durch den man die Beobachtungen fortgesetzt hat, abhängt) festsetzen zu können. Ich wähle, um dieses durch ein Beyspiel zu erläutern, folgende von Herrn Graf v. *Brühl* im Jahr 1793 gemachte Beobachtungen eines von *Mudge* verfertigten *Timekeeper* \*).

May.	Abw. v. d. mittl. Zeit im Mittag	
12	3' 56",06	+ 1",270 1,409 3,275 2,111
13	3 57,33	
21	4 8,60	
23	4 15,15	
30	4 29,93	

Die erste Columnne enthält die Tage der Beobachtungen, die zweyte der Uhr Abweichungen von der mittlern Zeit im wahren Mittage, die dritte enthält die Unterschiede derselben durch die Anzahl der zwischen zwey auf einander folgenden Beobachtungen verflossenen Tage dividirt. Die Uhr wich z. B. den 12 May von der mittlern Zeit ab

3' 56",06

\*) Man findet diese in einer von H. Gr. v. *Brühl* herausgegebenen Schrift *on the investigation of astronomical Circles*. London 1794. *Register of one of Mr. Mudge's timekeepers*. pag. 10.



$$\begin{array}{r} 3' \ 56'',06 \\ \text{d. 13} \quad 3 \quad 57,33 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Untersch.} = 1,27$$

folglich eilte die Uhr in einem Tag der mittlern Zeit vor  $1'',27$ . Der Unterschied der Abweichungen der Uhr von der mittlern Zeit den 13ten und 21sten May ist  $= 11'',27$ , die Anzahl der zwischen beyden Beobachtungen verflossenen Tage  $= 8$ , folglich die Voreilung der Uhr in 8 Tagen  $= 11'',27$  und in einem Tag  $\frac{11,27}{8} = 1'',409$ . Aus allen Be-

stimmungen nimmt man zuletzt ein Mittel, und man findet z. B. hier die mittlere tägliche Voreilung der Uhr  $= 2'',01625$ . Gesezt nun, man wollte die Abweichung der Uhr von der mittlern Zeit den 10 Jun. 1793 im Mittag bestimmen, so verfährt man auf folgende Art: die Anzahl der von der lezten Beobachtung d. 30 May bis auf den 10 Jun. verflossenen Tage ist  $= 11$ , und also die Voreilung der Uhr in dieser Zeit  $= 11 \cdot (2,01625) = 22'',179$ .

$$\begin{array}{r} \text{Abweich. v. d. mittl.} \\ \text{Zeit d. 30 May} \quad = 4' \ 29'',93 \\ \text{Voreil. in 11 T.} \quad = \quad 22,179 \\ \hline \text{Summe} = 4 \ 52,109 \end{array}$$

folglich wäre der Uhr Abweichung von der mittlern Zeit d. 10 Jun. im Mittag  $= 11' \ 52'',11$ , welche nur um  $1'',14$  größer ist, als die wirklich durch Beobachtung am 10 Jun. gefundene, wie man in dem oben angeführten Register findet.

## §. 227.

*Beyspiel einer Längenbestimmung durch Uhren.*

Im Jahr 1786 d. 29 May wurde eine von *Mudge* verfertigte Uhr auf der Sternwarte des H. Grafen von *Brühl* (*London Doverstreet* 33",6 gegen Abend von Greenwich) durch H. v. *Zach* das letzte mal vor seiner Abreise mit der durch Beobachtung an der Mittagsfernrohre gefundenen Zeit verglichen \*). Sie gieng für mittlere Zeit der Sternwarte zu spät um 2",1. Vom 28 Febr. bis 29 May wurde sie durch 41 Beobachtungen mit der Sonne verglichen; 17 derselben gaben die Summe der Voreilungen = 6",873, die übrigen 24 gaben die Summe der Verspätigungen = 13",905, woraus der mittlere tägliche Gang der Uhr = - 0",1715 hergeleitet wurde, um welches sie täglich gegen mittlere Zeit zurückblieb. Bald nach seiner Ankunft in *Gotha* bestimmte H. von *Zach* durch 8 correspondirende Sonnenhöhen mit einem Spiegelsextanten die Zeit der Uhr im wahren Mittag d. 27 Jun. 1786 11<sup>u</sup>. 19' 3",40. Vom 29 May bis 27 Jun., in 29 Tagen, blieb die Uhr gegen mittlere Zeit zurück um 29. (0",1715)

$$= 4",9735$$

die Uhr zu spät  
für mittl. Zeit in London

d. 29 May

$$= 2,10$$

d. 27 Jun. für mittl. Zeit  
in London zu spät um

$$\underline{7,0735}$$

mittl.

\*) *De Zach tabulae motuum Solis*, pag. 4.

mittl. Zeit im w. Mittag	
d. 27 Jun.	$= 0^u. 2' 34'', 3$
Zeit d. im w. Mittag in London	$0 \ 2 \ 27,2265$
— — in Gotha	$11 \ 19 \ 3,40$
Mittagsunterschied	$= 0 \ 43 \ 23,8265$

Da nun die Uhr in Gotha zu spät gieng, so liegt Gotha von London gegen Morgen. *Doverstreet* ist westlicher als Paris um  $9' 53'', 6$ , also ist der Mittagsunterschied zwischen der Pariser Sternwarte und der Gothaischen auf *Fridenstein*  $= 33' 30'', 2$ ; zwischen ersterer und der Sternwarte auf dem *Seeberg*  $= 33' 30'', 2 + 6'', 5 = 33' 36'', 7$ , weil der *Seeberg* um  $6'', 5$  östlicher liegt als *Fridenstein*.

### *Bestimmung der Länge durch irdische Signale.*

#### §. 228.

Wenn zwey Örter so nahe beyeinander liegen, daß man von dem einen nach dem andern hinsehen, oder an beyden Örtern ein auf einem Berg gegebenes Zeichen bemerken kann, so kann ihr Mittagsunterschied so genau, als durch die zur Längenbestimmung tauglichsten Himmelsbegebenheiten, und vielleicht noch genauer, bestimmt werden. Man siehet leicht, daß das Signal, welches die Stelle einer Himmelsbegebenheit vertreten soll, nicht allein leicht muß bemerkt werden können, sondern auch die Dauer der Erscheinung so kurz als möglich seyn muß. Man fand hiezu die Entzündung von Schießpulver

pulver vorzüglich bequem. Die Feuerraketen haben noch den Vorzug, daß sie auf eine beträchtliche Höhe steigen, und also der Augenblick ihres Plazens an entfernten Örtern desto leichter bemerkt werden kann. Die schnelle Bedeckung einer Flamme erfordert schon umständlichere Vorrichtungen. Picard bestimmte auf diese Art den Mittagsunterschied zwischen der Sternwarte in *Copenhagen* und *Uranienburg*. *De la Condamine* gebrauchte Schießpulver; auch *Cassini* bediente sich desselben, einen Grad der Länge in der Breite von  $45\frac{1}{2}^{\circ}$  zu messen. Die Flamme von 10 Pf. Pulver, das an einem Ort unweit des Ufers der mittelländischen See, von welchem aus man zwey Einsiedeleyen, die eine in den Gebürgen *S. Victorie* in *Provençe*, die andere auf den Gebürgen von *Sette* in *Languedoc*, sehen konnte, angezündet wurde, war an beyden leztern Orten schon mit dem bloßen Auge bemerkbar, und zeigte sich wie ein Blitz, der keine halbe Secunde dauerte \*). Längenbestimmungen mit Feuerraketen führt *H. v. Zach* an in der *Canzler- und Meisnerischen Quartalschrift* 3 Jahrg. 5 Heft.

Das Verfahren selbst hat sonst keine Schwierigkeit, und ist von den oben beschriebenen Methoden durch Mondsfinsternisse und Verfinsterungen der Jupiterstrabanten nicht verschieden. Man hat hier den gedoppelten Vortheil einer *augenblicklichen* und von dem Ort des Beobachters auf der Erde *unabhängigen*

\*) *Cassini de sury la Meridiene de Paris.*

gichen Erscheinung, so daß man den Mittagsunterschied bis auf  $\frac{1}{2}$  Sec. sicher bestimmen kann, besonders, wenn aus mehreren Beobachtungen ein Mittel genommen wird.

*Bestimmung der Länge durch Beobachtung der Culminationen des Monds.*

§. 229.

Wenn man an verschiedenen Orten die Zeiten beobachtet, welche zwischen der Culmination des Monds und eines gewissen Fixsterns verfließen, so werden diese Zeiten nicht gleich seyn, wenn die Orte nicht gleiche Länge haben, weil die gerade Aufsteigung des Monds sich sehr schnell ändert. Ein Beobachter, der den Mond zween Tage nacheinander mit einem Fixstern vergleicht, wird finden, daß der Mond bey seiner zweyten Culmination ungefähr 50 Min. später in den Mittagskreis kommt; in der Zwischenzeit der Beobachtungen hat sich die Erde in Beziehung auf den Mond einmal um ihre Axe gedreht. Gesezt nun, ein Beobachter unter einem andern Meridian hätte an demselben Tage zwischen der Culmination des Monds und desselben Fixsterns 10 Minuten mehr gezählt, so wäre die Länge des leztern Orts um  $\frac{10}{360}$  oder  $72^\circ$  kleiner als des erstern. Hierauf gründet sich die von *Ed. Pigott* \*) vorgeschlagene Methode, die Länge aus Durchgängen des Monds durch die Mittagsfläche zu finden. Herr *von Zach* bestimmte auf

\*) Philos. Transactions for the Year 1786.

mit 1792 auf diese Art den Mittagsunterschied zwischen *Gotha* und *Manheim* \*). Die Culmination des zweyten Mondsrandes wurde beobachtet in *Gotha* um

$$\begin{array}{r} 13^{\text{U.}} 47' 32'',45 \text{ Sternzeit} \\ \text{der Spica } 13 \quad 14 \quad 17,87 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Untersch.} = 33 \quad 14,58$$

Herr *Barry* beobachtete in *Manheim* die Culmination des zweyten Mondrandes um

$$\begin{array}{r} 15^{\text{U.}} 47' 53'',0 \\ \text{der Spica } 13 \quad 14 \quad 17,2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 15^{\text{U.}} 47' 53'',0 \\ 13 \quad 14 \quad 17,2 \end{array}} \right\} \text{Sternzeit}$$

$$\text{Untersch.} = 33 \quad 35,8$$

$$\text{obig. Untersch.} = 33 \quad 14,58$$

$$\hline 21,22$$

folglich war die gerade Aufsteigung des Monds zur Zeit der Beobachtung in *Manheim* schon um  $21'',22$  in Zeit oder  $5' 18'',3$  im Bogen größer, als zur Zeit der Culmination in *Gotha*. Um die Länge zu bestimmen, muß die Veränderung der geraden Aufsteigung des Monds in einer gewissen Zeit gegeben seyn. Hat man diese nicht aus Beobachtungen, so muß man sie aus den Ephemeriden nehmen. Herr *von Zach* setzte die 12stündliche Veränderung der geraden Aufsteigung des Monds  $= 6^{\circ} 57'$ . Nun macht man die Proportion

$$6^{\circ} 57' : 5' 18'',3 = 12^{\text{St.}} : x^{\text{St.}}$$

$$\text{oder } 25020'' : 5819'',6 = 12 : 0,15266^{\text{St.}}$$

$$\text{also } x = 9' 9'',57 = \text{Mittagsuntersch.}$$

Wenn man keine correspondirende Beobachtungen hat, so kann man statt derselben die Zeit der Culmination des Monds aus Ephemeriden

\*) Jahrbuch für 1795, S. 250.

riden nehmen, so findet man den Mittagsunterschied zwischen dem Ort der Beobachtung und dem, für welchen die Ephemeriden berechnet sind. Allein hier kann der Fehler der Mondstafeln die Meridiandifferenz unsicher machen. Am sichersten ist es, wenn man correspondirende Beobachtungen hat, und auch die Veränderung der geraden Aufsteigung des Monds aus Beobachtungen herleitet. Herr *von Zach* hält diese Methode vor ebenso genau, als die der Jupiterstrabanten.

---

*Das Azimuth eines Objects durch astronomische Beobachtungen zu bestimmen.*

§. 230.

Wenn man, wie bereits oben gezeigt worden ist, einen Quadranten in die Mittagsfläche stellt, so kann man, nachdem man die Fernröhre horizontal gestellt hat, einen Punct auf der Erde finden, wo die verlängerte Mittagslinie hintrifft. Findet sich in dem Meridian kein deutlicher Gegenstand, so kann man ein Zeichen aufrichten lassen, welches von dem Fadenkreuz der Fernröhre bedeckt wird, wenn der Quadrant in der Mittagsfläche steht. Man sieht leicht, daß der Quadrant sehr genau vertical stehen und die Fernröhre genau einen größten Kreis beschreiben muß, welches nicht leicht zu erhalten ist. Hat man einmal einen Gegenstand in der

Ff

Mit-

Mittagsebene, so kann man alsdann Winkel zwischen ihm und zwischen andern Gegenständen messen: die, auf den Horizont reducirt, wenn die Schenkel des Winkels nicht horizontal seyn sollten, die Azimüthe erwähnter Punkte geben. Ohne mich in die verschiedene Methoden einzulassen, wie man mittelst der Quadranten die Azimüthe von irdischen Objecten bestimmen kann, will ich hier noch zeigen, wie man nach der von Herrn *v. Zach* vorgeschlagenen Methode \*) diese für die Geographie so nützliche Aufgabe mittelst des *Spiegelsextanten* auflösen kann.

§. 251.

Man messe, wenn die Sonne einige Grade hoch stehet, mit dem Sextanten den Abstand des nächsten Sonnenrandes von dem Gegenstand, dessen Azimüth man bestimmen will. Da die Fernröhre des Sextanten astronomisch ist, so liegt der Gegenstand immer zwischen der Sonne und ihrem Bild in der Fernröhre des Sextanten, wenn man den Abstand von dem nächsten Sonnenrande beobachtet. Das Sonnenbild wird durch die gefärbten Gläser *Z* Fig. 29 geblendet, wenn man nach dem irdischen Gegenstand geradezu sieht: Bey jeder Beobachtung bemerke man die Zeit der Uhr, deren Abweichung von der wahren Zeit bekannt seyn muß. Läge sowohl der Gegenstand, als auch die Sonne in dem Horizont, so wäre die Summe des beobachteten Winkels und des Halbmessers der Son-

\*) Astronom. Jahrbuch für 1793. S. 167. u. f.



Sonne, nachdem man auch den Error indicis angebracht hat, der Unterschied des Azimuths der Sonne und des irdischen Objects. Für den Augenblick, der Beobachtung berechne man die Abweichung der Sonne, so kennt man in dem sphärischen Dreyek  $PZS$ , Fig. 46. das Complement der Breite  $PZ$ , die Polardistanz der Sonne  $PS$  und aus der wahren Zeit den Stundenwinkel  $ZPS$ . Hieraus findet sich der Winkel  $PZS$  oder das Azimuth der Sonne, folglich auch das Azimuth des irdischen Objects, weil beyder Unterschied aus der Beobachtung bekannt ist.

Liegen aber die Sonne und das Object nicht in dem Horizont, so müssen ihre Erhöhungswinkel bekant seyn. Die Höhe der Sonne kann man aus der Polardistanz, Breite und Stundenwinkel berechnen, und die gefundene wahre Höhe durch Strahlenbrechung und Parallaxe in scheinbare verwandeln.

Diese Beobachtungen können nach einer Secudentaschenuhr gemacht werden, die nur etwa  $\frac{1}{4}$  Stunde gleichförmig gehen darf. Man beobachtet in diesem Fall abwechselnd Höhen der Sonne und Abstände. Erstere dienen zur Bestimmung der Abweichung der Uhr von der wahren Zeit, um die wahre Zeit der beobachteten Abstände angeben zu können.

Mit dem §. 75. beschriebenen und Fig. 39 abgebildeten künstlichen Horizont können noch Höhen beobachtet werden, die nicht unter 2 Graden sind. Allein da man hier nicht mehr, wie bey der Sonne, Linien von

Ff 2

der

der Mitte des künstlichen Horizonts und dem Mittelpunkt des Sextanten nach dem irdischen Gegenstand, dessen Höhe man messen will, gezogen als parallel ansehen kann, so muß folgende Verbesserung der beobachteten gedoppelten Erhöhungswinkel vorgenommen werden.

§. 232.

*Verbesserung der mit dem künstlichen Horizont beobachteten Höhen irdischer Objecte.*

Es seye Fig. 61 Taf. VII,  $AB$  der künstliche Horizont,  $O$  ein Object dessen Höhe über der Ebene des künstlichen Horizonts  $OCG$  man bestimmen will. Macht man den Winkel  $OCG = ACF$ , so muß man die Axe der Fernröhre des Sextanten in die Lage  $DFC$  bringen, um das Bild  $O'$  des Objects  $O$  in dem künstlichen Horizont zu sehen.  $E$  seye der Mittelpunkt des Sextanten,  $ab$  der grose,  $cd$  der kleine Spiegel. Hat man nun die Axe der Fernröhre in die Richtung des zurückgeworfenen Strals  $DC$ , und den Sextanten in eine verticale Lage gebracht, so wird man, um auch das von dem grosen und kleinen Spiegel reflectirte Bild in das Sehefeld der Fernröhre zu bringen, den grosen Spiegel  $ab$  vermittelst der Alhidade so lange bewegen müssen, bis der halbe Neigungswinkel beyder Spiegel dem Winkel  $ODO'$ , unter welchem die Verlängerung einer von dem Object  $O$  nach den Mittelpunkt des Sextanten

ten gezogenen geraden Linie  $OED$  den zurückgeworfenen Lichtstrahl  $CD$  schneidet, bey nahe gleich ist. Bringt man alsdann durch eine kleine Bewegung des großen Spiegels die beyden Bilder zur Bedekung, so ist der halbe Neigungswinkel beyder Spiegel dem Winkel  $ODO'$  gleich (§. 36. S. 63.) Den Winkel  $ODO'$  erhält man also, wenn man den gemessenen gedoppelten Erhöhungswinkel durch den Collimationsfehler, wie man ihn durch die Sonne oder einen andern sehr entfernten Gegenstand gefunden hat, verbessert. Nun ist aber der wahre gedoppelte Erhöhungswinkel =

$$OCO' = ODO' + DOC$$

Es kömmt also nur darauf an, die von der Nähe des Gegenstands  $O$  herrührende Parallaxe  $DOC$  zu bestimmen. Den Abstand  $FC$  des Mittelpuncts des kleinen Spiegels von der Mitte des künstlichen Horizonts, oder dem Punct, wo die verlängerte Axe der Fernröhre die Ebene des Horizonts trifft, kann man messen. Der Abstand  $EF$  der Mittelpuncte beyder Spiegel und der Winkel  $DFE$  sind aus dem Bau des Sextanten gegeben. (Bey obigem Sextanten ist  $EF = 2 \text{ Z. } 11 \text{ Lin.}$  und  $DFE = 30^\circ$ . §. 64. S. 86.) In dem Dreyek  $DEF$  verhält sich

$$DF : \sin DEF = EF : \sin ODO'$$

$$\text{also ist } DF = \frac{EF \cdot \sin DEF}{\sin ODO'} = \frac{EF \sin OEF}{\sin ODO'}$$

$$\text{aber } OEF = ODO' + DFE$$

$$\text{daher } DF = \frac{EF \sin (ODO' + DFE)}{\sin ODO'}$$

Endlich muß noch der Abstand des Gegenstands  $CO$  ungefähr bekannt seyn, und man hat alsdann

$$DC: CO = \sin DOC: \sin ODO'$$

also

$$\begin{aligned} \sin DOC &= \frac{DC}{CO} \sin ODO' \\ &= \frac{FC}{CO} \sin ODO' + \frac{DF}{CO} \sin ODO' \\ &= \frac{FC}{CO} \sin ODO' \\ &\quad + \frac{FE}{CO} \sin (ODO' + DFE) \end{aligned}$$

In den meisten Fällen werden  $FC$  und  $FE$  in Vergleichung mit  $CO$  sehr klein seyn, alsdann wird auch der Winkel  $DOC$  klein, und man kann für den Sinus den Bogen selbst setzen; da wird also in Secunden ausgedrückt

$$\begin{aligned} DOC &= \frac{206265 \cdot FC}{CO} \sin ODO' \\ &\quad + \frac{206265 \cdot FE}{CO} \sin (ODO' + DFE) \end{aligned}$$

Dieser Winkel zu dem beobachteten gedoppelten Erhöhungswinkel addirt, gibt also die gedoppelte Höhe des Gegenstands über die Ebene des künstlichen Horizonts.

*Beyspiel.* Es seye der beobachtete gedoppelte Erhöhungswinkel  $ODO' = 15^\circ 30'$ ,  $OC = 1375$  Fufs;  $FC = 15$  Z.  $= 1,25$  Fufs;  $FE$  wie oben  $= 2$  Z.  $11$  Lin.  $= 0,243$  F. und  $DFE = 30^\circ$ , also  $ODO' + DFE = 45^\circ 30'$

$$\begin{array}{rcl}
\text{Lg } 206265 & = & 5,3144251 \\
\text{Lg } FC & = & 0,0969100 \\
\text{Lg sin } ODO' & = & 9,4268988 - 10 \\
& & \hline
& & 4,8382339 \\
\text{Lg } CO & = & 3,1383027 \\
& & \hline
& & 1,6999312 \\
\text{I Theil} & = & 50'',11 \\
\text{Lg } 206265 & = & 5,3144251 \\
\text{Lg } FE & = & 0,3856063 - 1 \\
\text{Lg sin } (ODO' + DFE) & = & 9,8532421 - 10 \\
& & \hline
& & 4,5532735 \\
\text{Lg } CO & = & 3,1383027 \\
& & \hline
& & 1,4149708 \\
\text{II Theil} & = & 26'',00 \\
& & \hline
\text{Summe} & = & 76,11 = 1' 16'',11
\end{array}$$

Folglich ist der gedoppelte Erhöhungswinkel über die Ebene des künstlichen Horizonts  $= 15^\circ 31' 16'',11$ , und die Höhe  $OCG = 7^\circ 45' 38'',05$ .

### §. 253.

Wenn der Höhenwinkel unter 2 Graden ist, so kann man den §. 75 beschriebenen künstlichen Horizont nicht mehr gebrauchen, weil die Stralen zu schief auffallen, und die Spiegelebene sehr schmal erscheint. Herr Inspector *Köhler* in *Dresden* schlägt alsdann eine kleine mit einem Micrometer versehene Probierfernrohre vor (Man sehe den 36 §. S. 46), welche auf den nivellirten künstlichen Horizont gelegt mit dem Durchschnitt ihres Fadenkreuzes auf Punkte zeigt, die in dem Ho-

rizont liegen. Mit dem Micrometer kann man die Höhenwinkel oder auch Tiefen unter dem Horizont messen, die das halbe Sehefeld nicht übersteigen. Man kann der Fernröhre, ohne die Vergrößerung zu sehr zu schwächen, ein Sehefeld von 4 Graden geben, um die Lücke, welche der Sextant übrig läßt, auszufüllen.

### §. 234.

Noch eine Art, mit dem Sextanten Höhen- und Tiefenwinkel zu messen, beruht auf folgendem. Aus §. 65 wird begreiflich, wie man die Absehenslinie eines Visirlineals auf die Ebene eines Spiegels senkrecht richten kann. Gedenkt man sich nun einen horizontal gelegten Spiegel, und an dem Sextanten statt der Fernröhre ein Diopterlineal, so wird, wenn seine Absehenslinie nach §. 65 auf die Spiegelebene senkrecht gestellt wird, das Diopterlineal gegen das *Nadir* gerichtet seyn. Gegenstände, die nahe am Horizont liegen, wird man nur durch gedoppelte Reflexion von den beyden Spiegeln des Sextanten sehen können, wenn die Alhidade nahe bey  $90^\circ$  stehet, und man erhält, wenn man das Bild des Gegenstands an das Fadenkreuz der Fernröhre bringt, des letztern Abstand vom *Nadir*; zieht man von diesem  $90^\circ$  ab, so erhält man den Erhöhungswinkel; ist der Abstand vom *Nadir* kleiner als  $90^\circ$ , so wird der Erhöhungswinkel negativ, oder der Gegenstand liegt unter dem Horizont.

Das

Das Visirlineal an dem Sextanten besteht aus zwey Dioptern, die in eine Röhre eingesetzt sind, welche statt der Fernröhre aufgeschraubt wird. Die Augendiopter ist eine elfenbeinerne Scheibe, wodurch die Röhre auf der einen Seite geschlossen wird. Auf ihre von dem Auge abgekehrte Seite sind sich rechtwinklicht in dem Mittelpunkt der Scheibe, welcher durchbohrt ist, durchkreuzende schwarze Linien. Die an dem andern Ende der Röhre angebrachte Diopter besteht aus dem Fadenkreuz, dessen Fäden mit den Kreuzlinien auf der elfenbeinernen Scheibe parallel sind. Um letztere beleuchten zu können, ist die Röhre auf der Seite mit einer länglichten Öffnung versehen. Eine andere kurze Röhre schiebt sich über erstere, und trägt einen in einem Gewinde auf und nieder beweglichen Planspiegel, den man also stellen kann, daß er das auf ihn fallende Licht durch die Seitenöffnung der Röhre auf die untere Fläche der elfenbeinernen Scheibe wirft. Sieht man nun durch die Öffnung der elfenbeinernen Platte in einen horizontal liegenden Spiegel, so wird man die Röhre so richten können, daß ihr Fadenkreuz auf das Bild der Kreuzlinien, welche auf die untere Fläche der elfenbeinernen Scheibe gezeichnet sind, fällt. In diesem Fall steht die Absehenslinie vertical, und man siehet gerade gegen dem Nadir hin. Um einen horizontalen Planspiegel zu erhalten, kann man hier wieder Queksilber gebrauchen. Englische Künstler verfertigen hiezu einen eigenen

Ff 5

genen künstlichen Horizont, den man bequem bey sich führen kann. *AB* Fig. 62 Taf. VII ist eine cylindrische hölzerne Büchse. In die cylindrische Hölung *CD* paßt genau der mit feinem Leder überzogene Zapfen *GH*, dessen untere Grundfläche ebenfalls mit einer ledernen Scheibe *ab* überzogen ist, welche eine kleine Öffnung *i* hat, und dem Queksilber einen Weg durch den Canal *IK* in die cylindrische Hölung *NPOQ* offen läßt. *RS* ist ein rundes Planglas, dessen Durchmesser etwas kleiner ist als der Durchmesser der Hölung *NO*. Der Boden *QO* ist gegen die Öffnung *K* hin etwas vertieft. Will man den Horizont gebrauchen, so legt man das Planglas *RS* auf den Boden *QO* und füllt das Gefäß *CD* beynahe ganz mit Queksilber. Nun steckt man den Zapfen *GH* in die Hölung *CD* und drückt ihn nach und nach hinein, so wird das Queksilber genöthigt, durch die Öffnung *I*, welche so klein ist, daß alle Unreinigkeiten zurückbleiben, in das Gefäß *QP* aufzusteigen. Das Glas wird, wenn eine hinlängliche Menge Queksilber aufgestiegen ist, auf letzterem schwimmen und einen horizontalen Planspiegel abgeben. Nach dem Gebrauch wird alles Queksilber in die Büchse *CD* gegossen. Das Verbindungstück *TU* wird mit der Schraube *np* bey *NP* aufgeschraubt. Die andere Schraube *ef* paßt in *EF* und der mit Leder überzogene Theil *cd* drückt sich auf den bey *C* vorspringenden Rand an, um das Queksilber ganz in die Büchse *AB* zu verschließen. Damit das Glas *RS* nicht beschädigt



digst werde, wird der in der Hölung *NPQO* noch übrig bleibende Raum mit feinem Papier ausgefüllt. Der ganze Apparat macht nun ein Stück aus, und kann, weil das Planglas nur etwa 15 Lin. im Durchmesser haben darf, bequem in der Tasche getragen werden.

Wenn man den Error indicis an der Stelle, wo man den Höhenwinkel messen will, vermittelst des Gegenstands selbst bestimmt, dessen Höhe über dem Horizont man sucht, so erhält man genau die Höhe über eine durch den Mittelpunkt des Sextanten gezogene Horizontallinie. Gebraucht man aber den durch Beobachtungen der Sonne bestimmten Collimationsfehler, so muß man zu dem beobachteten Abstand vom Nadir noch den Winkel addiren, welchen Linien an den großen und kleinen Spiegel von dem Object aus gezogen mit einander machen.

### §. 235.

#### *Reduction der Winkel auf den Horizont.*

Durch die beyden Gegenstände und durch den Standpunct des Beobachters lege man ein Paar Verticalebenen, so ist beyder Ebenen Neigungswinkel der auf den Horizont reducirte Winkel beyder Objecte; ihre Abstände vom Scheitel des Beobachters und der beobachtete schiefe Winkel werden durch Bogen größter Kreise gemessen, welche ein sphärisches Dreyek bilden. Der Bogen, welcher den schiefen Winkel mißt, steht dem sphärischen Winkel gegenüber, der dem horizontalen

talen

talien Winkel gleich ist. Heißt nun der beobachtete schiefe Winkel  $W$ , der horizontale  $H$  und die beyden Erhöhungswinkel (die Complementary der Seiten, welche den horizontalen Winkel einschließen)  $a$  und  $b$ , so hat man die bekannte Gleichung:

$$\cos W = \cos H \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\text{also } \cos H = \frac{\cos W - \sin a \sin b}{\cos a \cos b}$$

oder, wie oben bey der Bestimmung des Stundenwinkels aus der Breite, Höhe und Polar-  
distanz der Sonne gezeigt wurde

$$(\sin \frac{1}{2} H)^2 = \frac{\sin \frac{1}{2} (W + a - b) \sin \frac{1}{2} (W - a + b)}{\cos a \cos b}$$

Ist aber  $H$  beynahe  $= 180^\circ$ , so kann man sicherer folgende Formel gebrauchen:

$$(\cos \frac{1}{2} H)^2 = \frac{\cos \frac{1}{2} (W + a + b) \cos \frac{1}{2} (W - a - b)}{\cos a \cos b}$$

Näherungsformeln, die man gebrauchen kann, wenn die Winkel  $a$  und  $b$  klein sind, findet man in H. Hofrath *Küstners astron. Abhandlungen*, I Samml. S. 41 u. f.

Liegt der eine Gegenstand im Horizont, oder ist  $b = 0$ , so hat man

$$\cos H = \frac{\cos W}{\cos a}$$

$$\text{oder } (\sin \frac{1}{2} H)^2 = \frac{\sin \frac{1}{2} (W + a) \sin \frac{1}{2} (W - a)}{(\cos a)^2}$$

$$\text{und } (\cos \frac{1}{2} H)^2 = \frac{\cos \frac{1}{2} (W + a) \cos \frac{1}{2} (W - a)}{(\cos a)^2}$$

## §. 236.

*Erläuterung der Methode, das Azimuth eines irdischen Objects zu bestimmen durch ein Beyspiel.*

Den 17 Jul. 1792 beobachtete ich in *Altburg* folgende Abstände der Sonne von einer gegen Süd-Süd-Ost auf einem kegelförmigen  $5\frac{1}{2}$  Meilen entfernten Berge liegenden Capelle. Die Zeiten wurden nach einer Secunden-taschenuhr beobachtet.

	Vormitt.	Abstände
I.	4 <sup>U.</sup> 41' 18"	83° 43' 58"
II.	-- 45 45	82 54 12
III.	-- 48 30	82 24 41
IV.	-- 58 28	80 39 8

Die Abstände sind schon wegen des Collimationsfehlers verbessert und um 15' 47" (Halbmesser der Sonne) vermindert, weil die Abstände des entferntesten Sonnenrandes genommen wurden. Dazwischen hinein nahm ich zur Berichtigung der Uhr folgende Sonnenhöhen:

		wahre Höhen.
A.	4 <sup>U.</sup> 43' 18"	3° 11' 23"
B.	-- 47 23	3 46 35
C.	-- 51 16	4 20 55
D.	5 0 20	5 40 13

Aus der Höhe und Abweichung der Sonne findet man mit Zuziehung der Breite auf oben gezeigte Art den Stundenwinkel der Sonne, folglich die wahre Zeit jeder Beobachtung. Die Sonnenhöhen gaben nun folgende Resultate:

Zeit

Zeit d. Uhr	betechnete w. Zeit	Abw. v. d. w. Zeit
4 <sup>U.</sup> 43' 18"	4 <sup>U.</sup> 38' 6"	5' 12"
— 47 23	— 42 9	5 14
— 51 16	— 46 4	5 12
5 0 20	— 55 1	5 19

Die Abweichungen der Uhr von der wahren Zeit sollten einander gleich seyn, wenn die Beobachtungen genau wären. Allein da die Uhr vom 16 auf den 17 Jul. der wahren Zeit in 24 St. um 8' 53" voreilte, so kommt noch der Gang der Uhr in der Zwischenzeit der Beobachtungen in Betrachtung. Man erhält, wenn man das Mittel aus den Zeiten der Uhr und aus ihren Abweichungen von der wahren Zeit nimmt, um 4<sup>U.</sup> 50' 28",25 Zeit der Uhr ihre Abweichung von der w. Zeit = 5' 14",25. Nun wurde die erste Beobachtung 7' 10",25 vor dem so eben gefundenen mittleren Zeitpunkt gemacht, folglich ist die eigene Voreilung der Uhr ihrem oben angegebenen Gang zufolge in dieser Zwischenzeit = 1",75, also ihre Abweichung von der wahren Zeit im Augenblick der ersten Beobachtung = 5' 14",25 — 2",6 = 5' 11",6. Auf diese Art fanden sich der Ordnung nach folgende Abweichungen der Uhr: 5' 11",6; 5' 13",0; 5' 14",5; 5' 18",0, welche schon besser mit obigen aus den Beobachtungen selbst hergeleiteten stimmen.

Ist der Gang der Uhr nicht bekannt, so muß man sämtliche Beobachtungen in zwei ungefähr gleich große Classen theilen, und aus den in jeder Classe befindlichen Resultaten ein Mittel nehmen, um für zwey mittlere Zeitpunkte der Uhr Abweichung von der wah-

wahren Zeit zu bekommen, woraus man sodann den Gang der Uhr herleiten kann.

	4 <sup>U.</sup>	43'	18"		5'	12"
	4	47	23		5	14
Summe	9	30	41		10	26
Mittel	4	45	20,5		5	13

Ebenso findet sich aus den beyden letzten Beobachtungen im Mittel um

	4	55	48,0		5	15,5
Untersch.		10	27,5			2,5

Hienach wäre die Voreilung der Uhr in 10' 27",5 = 2",5. Man sehe hierüber *Lamberts Beyträge zum Gebrauch der Mathematik, I Th. S. 431* u. f. Man muß aber dieses Mittel, den Gang der Uhr zu bestimmen, nur alsdann gebrauchen, wenn man keine andere Beobachtungen hat.

Lege ich obige Abweichung der Uhr von der wahren Zeit = 5' 14",25 um 4<sup>U.</sup> 50' 28",25 Zeit der Uhr, und ihren täglichen Gang + 8' 53" zum Grunde, so finde ich folgende wahre Zeiten der beobachteten Abstände:

- I. 4<sup>U.</sup> 36' 8"
- II. -- 40 33
- III. -- 43 17
- IV. -- 53 11

und aus der nun bekannten wahren Zeit, Abweichung der Sonne und Polhöhe folgende dazu gehörige wahre Sonnenhöhen:

- 2° 54' 24"
- 3 32 40
- 3 56 58
- 5 23 38

Um

/p. 206

Um die den beobachteten Abständen gegenüber stehenden Winkel (die horizontalen Winkel zwischen der Sonne und dem irdischen Object) zu berechnen, muß man aus den wahren Sonnenhöhen die *scheinbaren* herleiten, indem die Strahlenbrechung addirt die Parallaxe abgezogen wird.

Der irdische Gegenstand lag beynahe in dem Horizont, also kann man  $b = 0$  setzen, und man hat, wenn die scheinbare Sonnenhöhe  $a$ , der beobachtete Abstand  $W$  heißt

$$\cos H = \frac{\cos W}{\cos a} \quad (\S. 235.)$$

Die erste Höhe in scheinbare verwandelt ist  $= 3^\circ 8' 25'' = a$  und  $W = 83^\circ 43' 58''$ , also

$$\text{Lg } \cos W = 9,9380860$$

$$\text{C. Lg } \cos a = 0,0006526$$

$$\text{Lg } \cos H = 9,9387386$$

$$H = 83^\circ 43' 24''$$

Da man für den Augenblick der Beobachtung die wahre Sonnenhöhe, ihre Abweichung und den Stundenwinkel kennt, so findet man leicht das Azimuth der Sonne. Es verhält sich in dem sphärischen Dreyek  $PZS$  Fig. 46 Taf. IV

$$\sin PZS : \sin ZPS = \sin PS : \sin ZS$$

also ist, wenn die wahre Sonnenhöhe  $= h$ , Stundenwinkel  $= t$  und die Abweichung der Sonne  $= \delta$  gesetzt wird, der Sinus des Azimuths  $\alpha$

$$= \frac{\sin t \cos \delta}{\cos h}$$

Für

Für die erste Beobachtung ist  $t = 110^{\circ} 58' 0''$ ;  
 $\delta = 21^{\circ} 7' 39''$ ; und  $h = 2^{\circ} 54' 24''$ , also

$$\begin{aligned} \text{Lg} \sin t &= 9,9702486 \\ \text{Lg} \cos \delta &= 9,9697795 \\ \text{C. Lg} \cos h &= 0,0005591 \\ \hline \text{Lg} \sin \alpha &= 9,9405872 \\ \alpha &= 60^{\circ} 42' 30'',7 \end{aligned}$$

oder von Mittag an gerechnet

$$\begin{aligned} \text{oben war } H &= \begin{array}{r} 119^{\circ} 17' 29'',3 \\ 83 \quad 43 \quad 24,0 \\ \hline 35 \quad 34 \quad 5,3 \end{array} \\ \text{Azimuth der Capelle} &= \end{aligned}$$

Die übrigen drey Beobachtungen gaben

$$\begin{array}{r} 35^{\circ} 35' 35'' \\ 35 \quad 35 \quad 29 \\ 35 \quad 34 \quad 24 \\ \hline \end{array}$$

Mittel aus allen  $35 \quad 34 \quad 53$

Theils um den Gebrauch der Formel §. 235. zur Reduction der Winkel auf den Horizont zu erläutern, theils um zu zeigen, daß man in solchen Fällen, wo der Erhöhungswinkel des einen Objects sehr klein, und der schiefe Winkel nicht sehr klein oder nahe bey 180

Gr. ist, die Formel  $\cos H = \frac{\cos W}{\cos a}$  ohne

merklichen Fehler gebrauchen könne, will ich noch den ersten schiefen Winkel  $= 83^{\circ} 43' 58''$  auf den horizontalen reduciren, wen man auch auf den Erhöhungswinkel des irdischen Objects, welcher  $= 0^{\circ} 2' 30''$ , Rücksicht nimmt. Hier ist also

Gg

$W =$

rizont liegen. Mit dem Micrometer kann man die Höhenwinkel oder auch Tiefen unter dem Horizont messen, die das halbe Sehfeld nicht übersteigen. Man kann der Fernröhre, ohne die Vergrößerung zu sehr zu schwächen, ein Sehfeld von 4 Graden geben, um die Lücke, welche der Sextant übrig läßt, auszufüllen.

### §. 234.

Noch eine Art, mit dem Sextanten Höhen- und Tiefenwinkel zu messen, beruht auf folgendem. Aus §. 65 wird begreiflich, wie man die Absehenslinie eines Visirlineals auf die Ebene eines Spiegels senkrecht richten kann. Gedenkt man sich nun einen horizontal gelegten Spiegel, und an dem Sextanten statt der Fernröhre ein Diopterlineal, so wird, wenn seine Absehenslinie nach §. 65 auf die Spiegelebene senkrecht gestellt wird, das Diopterlineal gegen das *Nadir* gerichtet seyn. Gegenstände, die nahe am Horizont liegen, wird man nur durch gedoppelte Reflexion von den beyden Spiegeln des Sextanten sehen können, wenn die Alhidade nahe bey  $90^\circ$  stehet, und man erhält, wenn man das Bild des Gegenstands an das Fadenkreuz der Fernröhre bringt, des letztern Abstand vom *Nadir*; zieht man von diesem  $90^\circ$  ab, so erhält man den Erhöhungswinkel; ist der Abstand vom *Nadir* kleiner als  $90^\circ$ , so wird der Erhöhungswinkel negativ, oder der Gegenstand liegt unter dem Horizont.

Das



wie gewöhnlich, nur einige Grade jenseits des Nullpuncts hat. Nahe bey dem Mittelpunct des Quadranten seze man vor das Objectiv hin einen künstlichen Horizont (§. 71 u. f.), der genau nivellirt seyn muß, wenn man nicht die Oberfläche des Queksilbers hiezu gebraucht, so dals man durch die Fernröhre, die nun unter den Horizont geneigt wird, das reflectirte Bild des culminirenden Sterns sehen kann. Stellt man den horizontalen Faden der Fernröhre auf den Stern, so gibt der Quadrant des Sterns Tiefe unter dem Horizont an, die genau so groß seyn muß, als seine Höhe über dem Horizont, indem man die Fernröhre geradezu auf ihn richtete, wenn der Collimationsfehler  $= 0$  ist. Der zwischen beyden Lagen der Fernröhre enthaltene Winkel ist des Sterns gedoppelte Höhe; also die halbe Summe der Höhen- und Tiefenwinkel des Sterns verbesserte scheinbare Höhe, ihr halber Unterschied der Collimationsfehler.

Da sich die Höhen der Sterne nahe am Mittag nur wenig ändern, wenn sie, wie hier erfordert wird, so niedrig durch den Meridian gehen, so kann man beyde Beobachtungen während desselben Durchgangs durch den Mittagskreis machen. Am sichersten ist es, die Zeiten der Beobachtungen nach einer berichtigten Uhr zu bemerken, um allenfalls die Höhen auf den Mittag reduciren zu können (§. 133 u. f.). Steht der Quadrant in dem Mittagskreis unbeweglich, so wird man beyde Höhen, oder wenigstens eine derselben nehmen müssen, wenn der Stern von

genen künstlichen Horizont, den man bequem bey sich führen kann. *AB* Fig. 62 Taf. VII ist eine cylindrische hölzerne Büchse. In die cylindrische Hölung *CD* paßt genau der mit feinem Leder überzogene Zapfen *GH*, dessen untere Grundfläche ebenfalls mit einer ledernen Scheibe *ab* überzogen ist, welche eine kleine Öffnung *i* hat, und dem Queksilber einen Weg durch den Canal *IK* in die cylindrische Hölung *NPOQ* offen läßt. *RS* ist ein rundes Planglas, dessen Durchmesser etwas kleiner ist als der Durchmesser der Hölung *NO*. Der Boden *QO* ist gegen die Öffnung *K* hin etwas vertieft. Will man den Horizont gebrauchen, so legt man das Planglas *RS* auf den Boden *QO* und füllt das Gefäß *CD* beynahe ganz mit Queksilber. Nun steckt man den Zapfen *GH* in die Hölung *CD* und drückt ihn nach und nach hinein, so wird das Queksilber genöthigt, durch die Öffnung *I*, welche so klein ist, daß alle Unreinigkeiten zurückbleiben, in das Gefäß *QP* aufzusteigen. Das Glas wird, wenn eine hinlängliche Menge Queksilber aufgestiegen ist, auf letzterem schwimmen und einen horizontalen Planspiegel abgeben. Nach dem Gebrauch wird alles Queksilber in die Büchse *CD* gegossen. Das Verbindungstück *TU* wird mit der Schraube *np* bey *NP* aufgeschraubt. Die andere Schraube *ef* paßt in *EF* und der mit Leder überzogene Theil *cd* drückt sich auf den bey *C* vorspringenden Rand an, um das Queksilber ganz in die Büchse *AB* zu verschließen. Damit das Glas *RS* nicht beschädigt

digst werde, wird der in der Hölung *NPQO* noch übrig bleibende Raum mit feinem Papier ausgefüllt. Der ganze Apparat macht nun ein Stück aus, und kann, weil das Planglas nur etwa 15 Lin. im Durchmesser haben darf, bequem in der Tasche getragen werden.

Wenn man den Error indicis an der Stelle, wo man den Höhenwinkel messen will, vermittelst des Gegenstands selbst bestimmt, dessen Höhe über dem Horizont man sucht, so erhält man genau die Höhe über eine durch den Mittelpunkt des Sextanten gezogene Horizontallinie. Gebraucht man aber den durch Beobachtungen der Sonne bestimmten Collimationsfehler, so muß man zu dem beobachteten Abstand vom Nadir noch den Winkel addiren, welchen Linien an den großen und kleinen Spiegel von dem Object aus gezogen mit einander machen.

### §. 235.

#### *Reduction der Winkel auf den Horizont.*

Durch die beyden Gegenstände und durch den Standpunct des Beobachters lege man ein Paar Verticalebenen, so ist beyder Ebenen Neigungswinkel der auf den Horizont reducirte Winkel beyder Objecte; ihre Abstände vom Scheitel des Beobachters und der beobachtete schiefe Winkel werden durch Bogen größter Kreise gemessen, welche ein sphärisches Dreyek bilden. Der Bogen, welcher den schiefen Winkel mißt, steht dem sphärischen Winkel gegenüber, der dem horizontalen

talen

schoß alle gefärbten Gläser zurück, und blendete die beyden Sonnenbilder zugleich, durch das dunkle Glas am Ocular. D. 26 Jul. 1794 fand ich auf diese Art den Durchmesser der Sonne

$$31' 30''$$

$$31' 45'' \text{ Exced.}$$

$$\text{Diff.} = 15''$$

$$\text{Error ind.} = 7,5 \text{ add.}$$

Nun nahm ich das dunkle Glas am Ocular weg, und blendete die Sonnenbilder, indem ich bey jedem Spiegel das dunkelste Glas vor-schob. Der Durchmesser der Sonne fand sich

$$= 31' 15''$$

$$32' 0'' \text{ Exced.}$$

$$\text{Diff.} = 45''$$

$$\text{Error ind.} = 22,5 \text{ add.}$$

Man sieht hieraus, daß die gefärbten Gläser an den Spiegeln den Collimationsfehler um 15 Secunden änderten, und also wenigstens eines derselben etwas prismatisch war.

Die gefärbten Gläser des Sextanten ließen sich in ihren Fassungen gedrang umdrehen. Ich machte daher an dem Rande eines jeden Glases, so wie an dem anliegenden und diametraliter gegenüber stehenden Punct der Fassung Zeichen, an welchen ich sehen konnte, wenn das Glas um  $180^\circ$  umgedreht war.

Zuerst drehte ich das dunkelste Glas zwischen dem großen und kleinen Spiegel um  $180^\circ$ , blendete durch dieses und durch das dunkelste Glas hinter dem kleinen Spiegel die Sonnenbilder, und fand den Sonnendurchmesser

messer wieder  $= 31' 15''$  disseits des Nullpuncts wie oben. Der Fehler mußte nun in dem Glase hinter dem kleinen Spiegel liegen. Nachdem ich dieses um  $180^\circ$  gedreht hatte, fand ich den Sonnendurchmesser disseits des Nullpuncts  $= 31' 45''$ , also um  $30''$  größer als in der erstern Lage des Glases. Die Hälfte davon  $= 15''$  ist der Winkel, um welchen die Stralen von ihrer Richtung abgelenkt werden bey dem Durchgang durch das gefärbte Glas. Folglich muß man für die erste Lage des Glases  $15''$  zu dem vermittelt der gefärbten Gläser am großen und kleinen Spiegel gefundenen Collimationsfehler addiren, und für die zweyte Lage  $15''$  abziehen, um den Collimationsfehler zu bekommen, welchen man würde gefunden haben, wenn die Lichtstralen in den gefärbten Gläsern keine Brechung gelitten hätten. Nun gab der Sextant die Winkel disseits des Nullpuncts um  $22'',5$  zu klein,  $15''$  hievon rührten von der Brechung des gefärbten Glases her, also würde der Sextant ohne gefärbte Gläser die Winkel nur um  $22'',5 - 15'' = 7'',5$  zu klein angegeben haben, wie auch wirklich durch den Gebrauch des dunkeln Glases vor dem Ocular gefunden wurde.

Hätte ich nun einen Abstand des Monds von der Sonne gemessen, und bey dieser Beobachtung das Sonnenbild durch gedoppelte Reflexion in die Fernröhre gebracht, also letztere geradezu nach dem Mond gerichtet, so hätte ich nur  $7'',5$  zu den gemessenen Abständen addiren dürfen, weil das dunkle Glas

zwischen dem großen und kleinen Spiegel den Collimationsfehler nicht änderte. Dasselbe ist bey Beobachtungen zur Bestimmung des Azimuths eines irdischen Objects (§. 231.) zu bemerken.

Zu §. 81.

*Simpson's* Formel für die mittlere astronomische Strahlenbrechung läßt sich im allgemeinen so ausdrücken:

$$\varphi = \frac{1}{m} (z - \text{Arc. sin} (\sin (90^\circ - mR) \sin z))$$

wo  $R$  = der horizontalen Strahlenbrechung. Simpson setzt  $m = \frac{1}{2}$ . Setzt man die beständige Gröfse  $\sin (90^\circ - mR) = n$ , so wird

$\sin (z - m\varphi) = n \sin z$ , und es verhält sich

$\sin z : \sin (z - m\varphi) = 1 : n$ , also

$$\sin z - \sin (z - m\varphi) : \sin z + \sin (z - m\varphi) = 1 - n : 1 + n$$

aber  $\sin a - \sin b : \sin a + \sin b =$

$$\text{tang} \left( \frac{a-b}{2} \right) : \text{tang} \left( \frac{a+b}{2} \right)$$

daher

$$\text{tang} \frac{1}{2} m\varphi : \text{tang} (z - \frac{1}{2} m\varphi) = 1 - n : 1 + n$$

ferner

$$1 - n : 1 + n = 1 - \sin (90^\circ - mR) :$$

$$1 + \sin (90^\circ - mR)$$

$$= 2 \left( \sin \frac{mR}{2} \right)^2 : 2 \left( \cos \frac{mR}{2} \right)^2$$

$$= \left( \text{tang} \frac{mR}{2} \right)^2 : 1$$

folg-

folglich

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} m \varrho : \operatorname{tang} (z - \frac{1}{2} m \varrho) = \left( \operatorname{tang} \frac{mR}{2} \right)^2 : 1$$

oder, weil  $\varrho$  nicht viel über einen halben Grad beträgt

$$\frac{1}{2} m \varrho : \operatorname{tang} (z - \frac{1}{2} m \varrho) = \left( \operatorname{tang} \frac{mR}{2} \right)^2 : 1$$

für die scheinbare Zenithdistanz  $z'$  seye die Strahlenbrechung  $= \varrho'$ , so verhält sich

$$\frac{1}{2} m \varrho' : \operatorname{tang} (z' - \frac{1}{2} m \varrho') = \left( \operatorname{tang} \frac{mR}{2} \right)^2 : 1$$

also  $\varrho : \varrho' = \operatorname{tang} (z - \frac{1}{2} m \varrho) : \operatorname{tang} (z' - \frac{1}{2} m \varrho')$   
und nach Simpson

$$\varrho : \varrho' = \operatorname{tang} (z - \frac{11}{4} \varrho) : \operatorname{tang} (z' - \frac{11}{4} \varrho')$$

welches die in der Anmerkung zu dem 81. §. angeführte Formel ist. Nun setzt *Bradley* 3. statt  $\frac{11}{4}$ , und die Strahlenbrechung für  $45^\circ$  scheinbare Höhe  $= 57''$ , also verhält sich

$$\operatorname{tang} 3.57'' : \operatorname{tang} (45^\circ - 3.57'') = (\operatorname{tang} 3R)^2 : 1$$

$$\text{und man hat } (\operatorname{tang} 3R)^2 = \frac{\operatorname{tang} (2' 51'')}{\operatorname{tang} (44^\circ 57' 9'')}$$

$$= \operatorname{tang} (2' 51'') \operatorname{cotang} (44^\circ 57' 9'')$$

$$\operatorname{Lg} \operatorname{tang} (2' 51'') = 6,9185711$$

$$\operatorname{Lg} \operatorname{cotang} (44^\circ 57' 9'') = 10,0007201$$

$$\operatorname{Lg} (\operatorname{tang} 3R)^2 = 16,9192912$$

$$\operatorname{Lg} \operatorname{tang} 3R = 8,4596456$$

$$3R = 1^\circ 39' 2'',24$$

$$R = 0^\circ 33' 0,74$$

also die horizontale Strahlenbrechung  $= 33' 0'',74$ . In der *Bradleyschen* Tafel ist sie  $= 33' 0''$ .

Wird die horizontale Strahlenbrechung =  $33' 0''$  gesetzt, so findet man die Strahlenbrechung für  $45^\circ$  scheinbare Höhe durch die Formel

$$\text{tang } 3\varrho = (\text{tang } (1^\circ 39'))^2 \text{ tang } (45^\circ - 3\varrho)$$

oder weil man  $\varrho$  schon beynahe kennt

$$\text{tang } 3\varrho = (\text{tang } (1^\circ 39'))^2 \text{ tang } (44^\circ 57' 9'')$$

$$2. \text{Lg tang } (1^\circ 39') = 16,9189628$$

$$1. \text{Lg tang } (44^\circ 57' 9'') = \underline{9,9992799}$$

$$\text{Lg tang } 3\varrho = 6,9182427$$

$$3\varrho = 2' 50'',87$$

$$\varrho = 56'',956 \text{ *)}$$

Setzt man nun die horizontale Strahlenbrechung =  $33' 0''$ , so wird  $\sin(90^\circ - mR) = \sin(90^\circ - 6.33') = 0,9983418$ ; gebraucht man aber die aus der Strahlenbrechung für  $45^\circ$  Höhe =  $57''$  hergeleitete horizontale Strahlenbrechung =  $33' 0'',74$ , so erhält man  $\sin(90^\circ - mR) = 0,9983407$ , und man hat folgende beyde Formeln

$$\sin(z - 6\varrho) = 0,9983418 \sin z$$

$$\sin(z - 6\varrho) = 0,9983407 \sin z$$

Bey der Mayerschen Formel für die wahre Strahlenbrechung in dem 81 §. ist von dem Thermometer die Rede, welches Mayer bey seinen Beobachtungen gebrauchte. Dieses Thermometer wurde von *de Luc* nach England genommen, daselbst mit einem Quecksilberthermometer des H. *Cavendish* verglichen, an welchem der Siedpunct bey  $29,8$  engl. Z. ( $27,94$  par. Z.) Barometerhöhe bestimmt

\*) H. v. Zach hat wirklich in seiner Tafel nur  $56'',9$ .  
Tab. mor. ☉ Tab. XLI.



stimmt war \*), und hernach wieder nach Göttingen gebracht, wo es noch auf der Sternwarte aufbewahrt wird. Die Vergleichung gab folgende übereinstimmende Punkte

Fahrenheit. Cavendish	Fahrenheit. bey Mayers Thermometer
212	215,2
210	213,5
190	195,9
170	175,9
150	155,8
130	135,5
110	114,4
90	93,4
70	72,5
50	51,2
30	30,4
15	14,9
10	9,7

In schmelzendem Eis zeigte das Thermometer des H. *Cavendish* 32 (etwas sehr wenig darüber), Mayers Thermometer 32,5. Man sieht hieraus, daß der Gang des Thermometers nicht ganz gleichförmig war, doch waren die Fehler an den Stellen, welche bey den gewöhnlichen Lufttemperaturen gebraucht werden, nur geringe, und man findet (da Mayer 82,5 bey 212 seiner Fahrenheitschen Scale setzte)

36 Mayersche Grade = 75 Fahrenheitschen \*\*)

Da

\*) Journal des Savans pour l'année 1791 Fevrier.

\*\*) Man findet, wenn man die Grade von 15 bis 90 nimmt, 75 Fahrenh. Cav. = 78,5 Fahrenh. May. = 35,979 der Mayerschen Scale von 82,5 zwischen dem Siedpunct und Eispunct.

470  
 1000 Fahrenheitsche Grade  $\equiv$  4 Gr. des  
 80theiligen Queksilberthermometers sind, so  
 machen 36 May. Gr.  $33\frac{1}{2}$  Gr. der letztern Scale.  
 Heist nun die Anzahl Grade des Mayer-  
 schen Thermometers  $t$ , des 80theiligen Quek-  
 silberthermometers  $r$ , so hat man

$$t = 1,08.r$$

Hienach wird in der Formel S. 113, wenn  
 statt  $t$  Grade des 80theil. Queksilberthermom.  
 gesetzt werden, der Coefficient von  $r$   $\equiv$   
 $0,0046.1,08 \equiv 0,004968$ .

Hienach verhielten sich die Räume, wel-  
 che ein gewisses Volumen von Luft bey  
 dem Eispunct und Siedpuncte einnimmt  $\equiv$   
 1000:1397

nach Montons hat man 1400 \*)

Lambert 1375

de Luc 1403

Shuckburgh 1437,4

Roy 1484,21

Kramp 1381

de Saussure 1339

Mittel 1402,8

welches obigem Verhältniß ziemlich nahe  
 kommt, und den Coefficienten von  $r$  gleich  
 $0,005035$  gibt; oben wurde durch die Berich-  
 tigung des Mayerschen Thermometers gefun-  
 den  $0,004968$ , wofür man der Kürze halber  
 $0,005$  setzen kann.

Gebraucht man also bey den Beobach-  
 tungen ein Queksilberthermometer, an wel-  
 chem der Siedpunct bey 29,8 engl. Zollen Ba-  
 rome-

\*) Gehler's physikalisches Wörterbuch 3 Th. S. 20.

rometerhöhe bestimmt und der Raum zwischen ersterem und dem Eispunct in 80 gleiche Theile getheilt ist, so hat man, wenn  $r$  die Anzahl Grade über dem Eispunct ist,

$$\text{Refract.} = \frac{70'',71. b \sin \delta}{\sqrt{(1 + 0,005.r)}} \times \left( \sqrt{(1 + \frac{(16,5 \cos \delta)^2}{1 + 0,005.r})} - \frac{16,5 \cos \delta}{\sqrt{(1 + 0,005.r)}} \right)$$

*Bradley* berechnete seine Tafel der mittlern Strahlenbrechung für die Barometerhöhe 29,6 engl. Zolle (27,775 par. Z.) und für 50 Gr. des Fahrenheitschen Thermometers. Um also die Mayersche Strahlenbrechungen mit erstern zu vergleichen, setze man in Mayers Formel  $b = 27,775$  und  $r = + 8$ , so hat man nach S. 113.

$$\text{Tang } \omega = \frac{0,0618061}{\cos \delta}$$

$$\text{Refract.} = 1851'',78 \sin \delta \text{ tang } \frac{1}{2} \omega$$

$$\text{Lg } 0,0618061 = 8,7910327 - 10$$

$$\text{Lg } 1851,78 = 3,2675890$$

So findet man für 80° scheinb. Abstand vom Zenith.

$$\text{Lg } 0,0618061 = 8,7910327$$

$$\text{C. Lg } \cos \delta = 0,7603298$$

$$\text{Lg tang } \omega = 9,5513625$$

$$\omega = 19^\circ 35' 31'',5$$

$$\frac{1}{2} \omega = 9 \quad 47 \quad 45,75$$

$$\text{Lg } 1851'',78 = 3,2675890$$

$$\text{Lg } \sin \delta = 9,9933515 - 10$$

$$\text{Lg tang } \frac{1}{2} \omega = 9,2371878 - 10$$

$$\text{Lg Refr.} = 2,4981283$$

Re-

Refract. = 314",868  
 = 5' 14",868  
 nach Bradley 5 14,8 Taf. III

Unterschied = 0,068

Hienach ist folgende Tafel berechnet:

Z. D.	Stralenbr.	Z. D.	Stralenbr.
90	30' 51",8	52	1' 47",2
89	23 21,1	61	1 42,8
88	18 0,3	60	1 38,7
87	14 17,3	59	1 34,9
86	11 40,0	58	1 31,2
85	9 47,7	57	1 27,8
84	8 23,7	56	1 24,6
83	7 19,4	55	1 21,5
82	6 28,9	54	1 18,5
81	5 48,2	53	1 15,8
80	5 14,9	52	1 13,1
79	4 47,1	51	1 10,5
78	4 23,5	50	1 8,1
77	4 3,4	49	1 5,6
76	3 45,9	48	1 3,4
75	3 30,0	47	1 1,2
74	■ 17,1	46	0 59,2
73	3 5,1	45	0 57,1
72	2 54,4	44	0 55,1
71	2 44,7	40	0 47,9
70	2 36,0	35	0 40,0
69	■ 28,0	30	0 33,0
68	2 20,7	25	0 26,6
67	2 14,0	20	0 20,8
66	2 7,8	15	0 15,3
65	2 2,1	10	0 10,1
64	1 56,7	5	0 5,0
63	1 51,8	0	0 0,0

Mayers Formel gibt also die Strahlenbrechungen von  $81 - 90$  Z. Dist. kleiner, und von  $80 - 0$  größer als die Bradleysche, zwischen  $80$  u.  $81$  ist der Unterschied  $= 0$ . Von  $82 - 0$  beträgt der Unterschied nie über eine halbe Secunde. Diese Übereinstimmung hat schon *de Luc* bemerkt, welcher auf folgende Art die Bradleysche und Mayersche Formel auf denselben Zustand der Luft reducirte. Er sagt a. a. O. «Um diese beyden Formeln auf denselben beständigen Zustand der Luft zu reduciren, muß man in der Mayerschen machen  $b = 27,77$  par. Zollen, welche mit den von Bradley vestgesetzten  $29,6$  engl. Z. correspondiren: und um sie auf dieselbe Temperatur zu bringen, da Bradley sie  $18$  Fahrenheitische Grade höher setzt als Mayers Nullpunct, brachte ich sie darauf durch die *Gleichung des leztern*, indem ich  $\frac{4}{100}$  zu den mit der Bradleyschen Formel gefundenen Strahlenbrechungen addirte.» De Luc setzt also in der Mayerschen Formel  $b = 27,77$  und  $t = 0$ , erhält daher die Refraction für  $+ 32$  Fahrenh. Daher mußte er zu den Bradleyschen Strahlenbrechungen  $\frac{4}{100}$  addiren. (wovon  $\frac{4}{100}$  genommen werden müssen sagt de Luc nicht). Setzt man in obiger Formel  $r = 0$ ,  $b = 27,775$  und  $\delta = 80^\circ$ , so findet man die

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Strahlenbrechung} & = & 5' 27'',82 \\
 \text{oben für } r = + 8^\circ & & \underline{5 \quad 14,87} \\
 \text{Unterschied} & = & 12,95
 \end{array}$$

und

und es ist  $\frac{12'',95}{5' 27'',82} = \frac{12,95}{327,82} = 0,0395$

folglich ändert sich die Mayersche Strahlenbrechung bey einer Barometerhöhe von 27,775 p. Z. und bey der Temperatur des schmelzenden Eises sehr nahe um  $\frac{4}{100}$  ihrer Grösse, wenn das Thermometer um 8 sogenannte Reaumursche Grade steigt. Wahrscheinlich hat de Luc auf diese Art seine  $\frac{4}{100}$  gefunden. Ich hielt es für sicherer, in die Mayersche Formel selbst Bradleys Barometer- und Thermometerstand zu setzen, da aus jener Formel erhellet, daß de Luc's Gleichung nach aller Schärfe nicht statt finden kann.

Die horizontale Strahlenbrechung nach Mayer ist  $= 30' 51'',78$ , folglich um  $2' 8'',22$  kleiner als die Bradleysche. Ebenso fand es de Luc. Da die Strahlenbrechungen in kleinen Höhen noch sehr unsicher sind, so bleibt man zweifelhaft darüber, welche von beyden richtiger seye.

Zu §. 103.

*Berthoud* \*) fand, daß die Schwünge eines auf einer Schneide spielenden Pendels von 10 Graden auf  $\frac{1}{4}$  Grad reducirt wurden, wenn es 24 St. 13 Min. geschwungen hatte. Dasselbe Pendel an einer Feder aufgehängt machte anfangs Schwünge von 10 Gr., die auf  $\frac{1}{4}$  Gr. gebracht wurden in 21 St. 0'. Überdies bemerkt er, es könne sehr leicht geschehen,

\*) Essai sur l'horlogerie. T. II. pag. 60. n. 1546 et 1547.

hen, daß der Aufhängepunkt sich nach der größern oder kleinern Elasticität der Federn (welche sich mit der Temperatur der Luft ändern) verändere; die Verlängerung oder Verkürzung der Federn könne durch die Pendelstange nicht compensirt werden, weil die Luft schneller auf sie wirke, als auf die Stange; endlich haben die Federn noch den Fehler, daß sie nicht um eben so viel durch die Kälte wieder verkürzt werden, als sie durch die Wärme seyen verlängert worden, weil das Gewicht der Linse die Wirkung der letztern vermindere und die der erstern vergrößere, so daß die Uhr immer langsamer und langsamer gehe. Er verwirft daher die Aufhängung mit der Feder ganz, und gibt der *Aufhängung mit der Schneide* den Vorzug.

Zu §. 176.

*Zu finden, wie viel eine Fernröhre vergrößert.*

Bey der Beobachtung des Anfangs und des Endes der Sonnenfinsternisse kommt sehr viel auf die Vergrößerung der Fernröhren an, deren man sich bedient, und man kann bey der Bestimmung des Mittagsunterschieds aus Sonnenfinsternissen die Beobachtungen nicht wohl so miteinander verbinden, daß sich die von der Verschiedenheit der Fernröhren herrührenden Fehler gegenseitig aufheben, wie oben §. 174 u. 175. bey Mondsfinsternissen und Verfinsterungen der Jupiterstrabanten gezeigt wurde. Man muß daher die Vergrößerung

Hh der

der zu den Beobachtungen gebrauchten Fernröhren angeben.

Ist die Fernröhre astronomisch mit einem Ocular, so findet man die Vergrößerung, wenn man die Brennweite des Objectivs durch die Brennweite des Oculars dividirt. Die Brennweite des Oculars wird am leichtesten gefunden, wenn man das Bild, welches es von der Sonne macht, mit einem Blatt Papier auffängt und seinen Abstand von der Linse mißt, wenn das Sonnenbild am deutlichsten erscheint. Bey den Objectivgläsern geht diese Methode nicht mehr wohl an, weil man ihre Entfernung von dem Papier sehr merklich ändern kann, ohne eine Undeutlichkeit in dem Sonnenbild zu bemerken. Genauer ist die von H. Hofrath *Kästner* vorgeschlagene Methode \*). Man bringt nemlich einen feinen Faden an die Stelle des Bildes, welches das Objectiv von der Sonne oder einem andern sehr entfernten Gegenstand macht (§. 35. S. 44), so kann man den Abstand des Fadens von dem Objectiv genau messen, welcher der Brennweite gleich ist. Begreiflich muß die Fernröhre schon ganz fertig seyn. Will man die Brennweite eines Objectivs nur beynahe bestimmen, um darnach die Länge der Röhre angeben zu können, so kann man sich mit Vortheil der Methode bedienen, welche *Maskelyne* vorgeschlagen hat. Man nehme eine kleine Fernröhre und stelle die Ocularröhre so, daß man die Sonne oder einen Stern

\*) Astronomische Abhandlungen IIte Samml. S. 248. n. 45 u. 46.



Stern deutlich siehet. Nun halte man, ohne an der Fernröhre etwas zu ändern, vor das Objectiv derselben hin das Glas, dessen Brennweite man messen will. Betrachtet man nun einen Gegenstand, der von letzterem Glas genau um seine Brennweite absteht, so wird man ihn deutlich sehen, weil er in diesem Fall die von dem Gegenstand herkommenden Strahlen dem Objectiv der Fernröhre parallel zuschickt. Sieht man den Gegenstand nicht deutlich, so muß man seine Entfernung so lange ändern, bis der Gegenstand deutlich erscheint. Nun kann man den Abstand des Objectivs, dessen Brennweite man bestimmen will, von jenem Gegenstand messen, welcher der gesuchten Brennweite gleich ist. *Maskelyne* schlägt vor, man solle ein mit kleiner Schrift gedrucktes Buch vor das Objectiv hinsetzen, und die Stelle suchen, wo die Schrift am deutlichsten erscheint.

Eine andere Methode, die Vergrößerung zu finden, schlägt *Wolf* vor. (*Elementa Mathematicae universae Element. Diopt. Problema 39. pag. 334 edit. novae.*) Man richte die Fernröhre nach dem Dache eines Gebäudes, und betrachte durch dieselbe mit dem einen Auge die obere Reihe von Ziegeln, mit dem andern unbewafneten Auge betrachte man dieselben Ziegel, und bewege die Fernröhre so lange, bis das Ende eines Ziegels, den man durch die Fernröhre siehet, auf das Ende desselben Ziegels, den man mit dem bloßen Auge betrachtet, fällt. Nun zähle man die Anzahl der mit dem unbewafneten

Auge gesehenen Ziegel, welche von einem oder mehreren durch die Fernröhre gesehen bedeckt werden, so ist die Vergrößerung gleich der Summe der erstern dividirt durch die Summe der leztern.» Auf diese Art findet man aber die Vergrößerung für Gegenstände, die sich in eben der Entfernung befinden, in welcher das beobachtete Gebäude ist. Die Ziegel werden von gleicher Größe angenommen, welches gewöhnlich der Fall ist, wenigstens bey neuen Dächern, da sie alle in einem Model gemacht werden.

Diese Methode, welche bey allen dioptrischen und catoptrischen Fernröhren gebraucht werden kann, läßt sich so abändern, daß man die Vergrößerung genau bestimmen kann. Man betrachte einen entfernten Gegenstand, dessen scheinbare Größe bekannt ist, z. B. die Sonne, durch die Fernröhre mit dem einen Auge und mit dem andern vergleiche man das vergrößerte Sonnenbild mit einem Gegenstand in bekannter Entfernung von dem Auge. Hiezu kann man eine in bekannter Entfernung ausgestekte Scale gebrauchen, auf welcher man bemerkt, wie viel Theile derselben auf das vergrößerte Sonnenbild gehen. Hieraus und aus dem Abstand der Scale vom Auge findet man den Winkel, unter welchem das vergrößerte Sonnenbild dem Auge erschien, welcher durch den scheinbaren Durchmesser der Sonne, (den man mit einer hiezu hinlänglichen Genauigkeit aus astronomischen Tafeln oder Ephemeriden findet) dividirt, die Vergrößerung gibt.

gibt. Sind Vergrößerung und der Winkel, unter welchem der Gegenstand durch die Fernröhre erscheint, gegeben, so findet man daraus umgekehrt des Gegenstands scheinbare Gröſſe für das bloſe Auge, worauf sich *Herschel's Lampenmikrometer* gründet. Umständlichere Anweisung zu dieser Methode, die Vergrößerung zu bestimmen, findet man in H. Oberamtman *Schröters Beyträgen zu den neuesten astronomischen Entdeckungen*.

Für eine astronomische Fernröhre mit zwey Ocularen, wovon das eine zwischen dem Objectiv und seinem Brennpunct steht (das *Collectivglas*), findet man die Vergrößerung  $m$ , wenn des Objectivs Brennweite  $= L$ , die des Collectivglases  $= l$ , des zweyten Oculars  $= \lambda$ , der Abstand beyder Oculare  $= d$  gesetzt wird

$$m = \frac{L(l + \lambda - d)}{l\lambda}$$

oder wenn der Abstand des Collectivs von der Stelle des wirklichen Bildes, wo die Mikrometerfäden angebracht sind,  $= \delta$  ist

$$m = \frac{L(l - \delta)}{l\lambda}$$

Bey der zu oben beschriebenen Sextanten gehörigen Fernröhre ist nach §. 64. S. 86 u. 87 für die stärkere Vergrößerung  $l = 7,0$  Lin.  $\delta = 2,0$  Lin.  $\lambda = 4,5$  Lin. und  $L = 6 \text{ Z.} = 72$  Lin.

$$\text{also } m = \frac{72 \cdot 5}{7 \cdot 4,5} = 11,4 + \dots$$

Stehen beyde Oculargläser zwischen dem Brennpunct des Objectivs und dem Auge (wel-

der Einrichtung Ramsden den Vorzug vor obiger gibt), so hat man, wenn die Brennweite des Oculars, welches dem Brennpunct des Objectivs am nächsten ist,  $= l$ , die Brennweite des zweyten  $= \lambda$ , ihr Abstand von einander  $= d$  gesetzt wird,

$$m = \frac{L(l + \lambda - d)}{l\lambda} \text{ wie oben *)}.$$

Das aus beyden Gläsern zusammengesetzte Ocular vertritt die Stelle eines einfachen, des-

sen Brennweite  $= \frac{l\lambda}{l + \lambda - d}$  wäre. Das

am nächsten bey dem Brennpunct des Objectivs stehende Ocular steht von demselben ab

um  $\frac{l(\lambda - d)}{l + \lambda - d}$ .

An meinem 4zolligen Sextanten ist die Ocularröhre zu der stärkern Vergrößerung auf letztere Art eingerichtet. Ich fand  $l = 9$  Lin.  $\lambda = 8$  Lin.  $d = 6,5$  Lin.  $L = 68$  Lin. hiernach wäre

$$m = \frac{68(9 + 8 - 6,5)}{8 \cdot 9} = 9,91$$

Hat die Fernröhre mehr als zwey Oculare, so wird man die Vergrößerung durch Versuche, wie oben gezeigt wurde, genauer bestimmen können als durch Rechnung, weil die kleinen Fehler, denen man bey der Bestimmung

\*) Wenn die Brennweiten der Gläser für beyde Einrichtungen dieselben bleiben, so gibt letztere immer eine stärkere Vergrößerung als die erstere, weil im ersten Fall  $d > \lambda$ , im zweyten  $d < \lambda$  seyn muß, um deutlich zu sehen.

stimmung der Brennweiten ausgesetzt ist, sich hier zu sehr anhäufen können.

*Ramsden* hat ein eigenes Instrument zur Bestimmung der Vergrößerung einer Fernröhre erfunden, das sich auf folgenden Satz gründet: Wenn die Fernröhre so gestellt ist, daß man entfernte Gegenstände deutlich sieht, so machen die Oculargläser von einem an der Stelle des Objectivs befindlichen Object ein Bild, das hinter das dem Auge am nächsten stehende Ocular fällt, und sich zu ersterem verhält  $= 1 : m$  (wenn  $m =$  der Vergrößerung). Die Stelle des Objects am Objectivglas kann die kreisförmige Fassung oder Bedekung desselben selbst vertreten, in welchem Fall man hinter dem letzten Ocular eine kleine helle Scheibe sieht, welche das Bild der Öffnung des Objectivs ist. Ein solches Bild entsteht (die holländische Fernröhre ausgenommen) bey allen dioptrischen und catoptrischen Fernröhren (bey letztern vertritt die Öffnung des großen Spiegels die Stelle der Öffnung des Objectivs bey erstern), und fällt immer dahin, wo dioptrischen Sätzen zu folge die vortheilhafteste Stelle des Auges hintrifft. Man nehme z. B. eine astronomische Fernröhre mit einem Ocular. Die Öffnung des Objectivs seye  $= O$ , ihr Bild hinter dem Ocular  $= o$ , ihre Abstände vom Ocular  $= D$  und  $d$ , die Brennweite des Objectivs  $= L$ , des Oculars  $= l$ , so ist

$$O : o = D : d$$

$$\text{und } D : d = (D - l) : l$$

$$\text{aber hier } D = L + l$$

folglich  $D:d = L:l$

$$O:o = m:1$$

$$d = \frac{D \cdot l}{D - l} = \frac{(L + l) l}{L}$$

$$= l + \frac{l^2}{L} \text{ wo die Stelle des Auges}$$

hintrifft.

Bev zusammengesetzten Fernröhren und Spiegeltelescopen fällt der Beweis weitläufiger aus, weswegen ich ihn hier übergehen muß.

*La Lande* macht bey der Beschreibung von *Ramsden's Dynameter* in der französischen Übersezung von Ramsdens Theilungsmaschine, eine Anmerkung, wodurch man veranlaßt wird zu glauben, daß die Voraus-

sezung  $m = \frac{O}{o}$  nur so weit richtig seye, als

man annehmen könne, das Bild der Öffnung des Objectivs falle in den Brennpunct des Oculars. Aus obigem siehet man, daß

$m = \frac{O}{o}$  ebenso richtig ist als  $m = \frac{L}{l}$ .

*Ramsden's Dynameter* besteht nun aus drey kleinen Röhren. Die erste, welche eine convexe Linse von ungefähr 8 Lin. Brennweite enthält, läßt sich in die zweyte hinein schieben, bis man die darinn befindliche Scale auf einer durchsichtigen Scheibe von Horn\*), die in Hunderttheile von Zollen getheilt ist, deut-

\*) Scalen auf Glas, dergleichen *Brander* verfertigte, und die auch bey H. *Tiedemann* in *Stuttgart* in grosser Vollkommenheit zu haben sind, scheinen mir zu diesem Gebrauch vorzüglicher zu seyn.

deutlich siehet. Leztere Röhre läßt sich in einer dritten, welche an die Ocularröhre hingehalten wird, so lange verschieben, bis man die Scale und das helle Bild von der Öffnung des Objectivs zugleich deutlich siehet. (Um die Scale genau an die Stelle des Bilds zu bringen, kann man sich der Methode (§. 35) bedienen). Man zählt nun die Anzahl von Theilen, welche das Bild auf der Scale einnimmt, drückt die Öffnung des Objectivs in Hunderttheilen desselben Zolles aus, und dividirt die Anzahl der leztern durch die der erstern, so hat man die Vergrößerung.

Man könnte hier die Einwendung machen, daß kleine Fehler, die man in der Messung der Öffnung des Objectivs und des Bildes von ihm begehen kann, diese Methode unsicher machen, weil jene Größen selbst klein sind. Allein man wird sie weit genauer messen können als die Brennweiten der Gläser, und die gefundene Vergrößerung wird man bey einiger Aufmerksamkeit immer der Wahrheit sehr nahe finden. *Ramsden* hat noch eine andere Art von Dynameter angegeben, die sich von obigem nur durch die Vorrichtung unterscheidet, welche zur Messung des Bildes von der Öffnung des Objectivs dient, und durch Revolutionen einer Schraube geschieht, welche die Mittelpuncte einer durch ihren Mittelpunkt zerschnittenen Linse einander näher bringt oder sie voneinander entfernt, bis die beyden Bilder, welche jede Hälfte der Linse macht, einander berühren, wo alsdann durch die Anzahl von Schraubenrevolutionen und

Theile derselben die GröÙe des Bilds von der Öffnung des Objectivs bestimmt wird.

Zu §. 197.

Da der aus den Beobachtungen dieser Finsterniß hergeleitete Mittagsunterschied zwischen *Gotha* und *Paris* um  $10'',7$  von den genauen chronometrischen und durch Fixsternbedeckungen bestätigten Bestimmungen des H. v. Zach abweicht, so kann dieß leicht von der Verschiedenheit der von beyden Beobachtern gebrauchten Fernröhren oder der Heiterkeit des Himmels herkommen. Übrigens kommen öfters Unterschiede von 10 Sekunden hervor, wenn man aus verschiedenen Sonnenfinsternissen oder aus Beobachtungen des Anfangs und Endes und micrometrischen Messungen (§. 199.) die Mittagsunterschiede derselben Orte herleitet. Daß aber dennoch diese Erscheinungen den Jupiterstrabantenverfinsterungen vorzuziehen seyn, erhellet daraus, daß schon eine beträchtliche Anzahl von Beobachtungen der letztern dazu erfordert wird, um die Meridiandifferenz innerhalb obiger Gränzen zu bestimmen.

Zu §. 210.

Bey dem ersten Anblik scheinen die Differentialformeln zur Bestimmung des Einflusses, welchen verschiedene Voraussetzungen der abgeplatteten Gestalt der Erde auf die Längenbestimmung haben, so verwikelt zu seyn, daß man glauben könnte, ebenso leicht  
den



den Zweck zu erreichen, wenn man die ganze Rechnung der Parallaxen von neuem unter der Voraussetzung einer andern Abplattung machte. Allein die Rechnung wird dadurch sehr abgekürzt, daß man die trigonometrischen Functionen nur bis auf Minuten genau in den Differentialformeln gebraucht, und sie also aus den gewöhnlichen Tafeln geradezu nehmen darf. Sind einmal die Coefficienten

von  $d. \frac{n}{m}$  bestimmt, so kann man sehr

leicht die Zusammenkunft für jede beliebige Abplattung angeben, welches noch eine besondere Bequemlichkeit dieser Differentialformeln ist.

#### Zu §. 215.

Durch die Beobachtung erhält man den scheinbaren Abstand der Ränder des Mondes und der Sonne. Um den scheinbaren Abstand der Mittelpunkte zu erhalten muß man daher zu dem beobachteten Abstand die Summe der Halbmesser der  $\odot$  und des  $\textcircled{D}$  addiren; wenn man den Abstand der nächsten Ränder genommen hat. Der Halbmesser des Mondes hängt nicht allein von seiner horizontalen Parallaxe, sondern auch von seiner Höhe über dem Horizont ab, weil er bey unverändertem Abstand vom Mittelpunkt der Erde dem auf der Oberfläche derselben befindlichen Beobachter desto näher kömmt, je mehr er sich dem Zenith nähert. Der Abstand des Mondes vom Mittelpunkt der Erde verhalte sich zu seinem Abstand vom Beobachter  $= r:1$ , so ist,

ist,

ist, den horizontalen Durchmesser des Mondes  $\pm d$ , den, welcher zum Abstand des Beobachters vom Mond gehört  $\pm d'$  gesetzt

$$\sin \frac{1}{2} d' = r \sin \frac{1}{2} d \quad (\S. 187. \text{ S. 345 u. 346})$$

Man gedenke sich die Mittelpunkte der Erde und des Mondes und den Ort des Beobachters durch gerade Linien verbunden, so ist der Winkel am Mittelpunkt der Erde  $\pm$  der wahren Zenithdistanz des Mondes, der Winkel am Mond die Höhenparallaxe des  $\mathfrak{D}$ , und der dritte, oder vielmehr dessen Nebenwinkel, der scheinbare Abstand des Mondes vom Zenith. Ist also des Mondes wahre Höhe  $\pm h$ , seine scheinbare  $\pm h'$ , so verhält sich

$$r : 1 = \cos h : \cos h'$$

$$\text{also ist } r = \frac{\cos h}{\cos h'}$$

Es seye des Mondes Höhenparallaxe für die Höhe  $h = p$ , so ist

$$h = h' - p$$

$$\text{folglich } r = \frac{\cos h' \cos p + \sin h' \sin p}{\cos h'}$$

$$= \cos p (1 + \tan h' \tan p)$$

$$\text{aber } \tan p = \frac{\sin \pi \cos h'}{1 - \sin \pi \sin h'} \quad (\S. 8a.)$$

$$\text{also } r = \frac{\cos p}{1 - \sin \pi \sin h'}$$

$$\text{man seze } \frac{1}{2} \pi \sin h' = C$$

so ist bis auf Tausendtheile von Secunden genau

$$\sin \frac{1}{2} d' = \frac{\sin \frac{1}{2} d \cdot \cos p}{2 \cdot (\sin (45^\circ - C))^2}$$

oder,

oder, weil  $d$  nicht viel über  $\frac{1}{2}$  Grad, sehr nahe

$$d' = \frac{\frac{1}{2} d \cdot \cos p}{(\sin(45^\circ - C))^2}$$

Wenn des Monds scheinbare Höhe  $h = 0$ , so ist seine wahre Höhe  $h' = \pi =$  der Horizontalparallaxe, also der Durchmesser des Monds am Horizont  $= d' = d \cdot \sec \pi$ . Ist aber des Monds wahre Höhe  $= 0$ , so wird die scheinbare Höhe  $h = -\pi$ , und  $d' = d \cos \pi$ . Der horizontale Halbmesser des Monds ist also immer von demjenigen verschieden, wie er in dem Mittelpunkt der Erde erscheinen würde, und ist größer als der letztere, wenn sich der Mond in dem scheinbaren, kleiner wenn er sich in dem wahren Horizont befindet. Beyde werden einander gleich, wenn  $h' = \frac{1}{2}\pi$ , folglich  $h = -\frac{1}{2}\pi$ .

Setzt man den  $\cos p = 1$ , so wird  $r$  beynahe  $= 1 + \sin \pi \sin h$  aber  $\pi = \frac{11}{6} d$  nach *Mayer*, also  $\sin \pi = \sin \frac{11}{6} d$ , beynahe  $= \frac{11}{6} \sin d$

$$d' = d \left( 1 + \frac{11}{6} \sin d \sin h' \right)$$

folglich die Vergrößerung des Durchmessers des Monds für die wahre Höhe  $h'$  bis auf 0,3 Sec. genau

$$= \frac{11 \cdot d}{6} \sin d \sin h'$$

Da man bey der Reduction der Abstände des Monds von der Sonne ohnehin die Höhenparallaxe des Monds nöthig hat, so wird hier

die Formel  $d' = \frac{d \cos h}{\cos h'}$  die bequemste seyn.

Nur in sehr großen Höhen wird ihr Gebrauch etwas unsicher.

Nach

Nach §. 219 S. 423 war die wahre Höhe des Mondes

$$\begin{array}{rcl}
 h' = 56^{\circ} 13' 46'' & \text{C. Lg cos} = & 0,2550279 \\
 p = & 0 & 30 \ 31 \\
 \hline
 h = & 55 & 43 \ 15 \\
 \frac{1}{2}d = & 0 & 14 \ 48 \\
 = & & 888'' \\
 \text{Lg cos} = & 9,7506824 & - 10 \\
 \text{Lg} = & 2,9484130 & \\
 \hline
 \text{Lg } \frac{1}{2}d' = & 2,9541233 & \\
 \frac{1}{2}d' = & 899'',75 & \\
 \frac{1}{2}d = & 888,00 & 
 \end{array}$$

$$\text{Vergröß. d. } \mathfrak{D} \text{ Halbm.} = 11,75$$

Durch die Näherungsformel findet man folgendes:

$$\begin{array}{rcl}
 d = 29' 36'' & \text{Lg sin} = & 7,9350125 - 10 \\
 & \text{Lg } \frac{11}{6} = & 0,2632415 \\
 & \text{Lg } d = & 3,2494430 \\
 & \text{Lg sin } h' = & 9,9197422 - 10 \\
 & & \hline
 & & 1,3674392
 \end{array}$$

$$\text{Vergröß. d. Durchm.} = 23,30$$

— — Halbm. = 11,65 nur 0'',1 weniger als durch die genaue Formel.

## *Erklärung und Gebrauch der Tafeln.*

### *I. Tafel.*

Mit einem Quadranten, der in 96 gleiche Theile getheilt ist, wovon jeder vier Unterabtheilungen hat, die durch einen Vernier in 16 gleiche Theile getheilt werden, hat man eine Höhe gemessen und gefunden 54 + 1 Unterabtheilung + 4 Theile des Vernier. Wie viel beträgt dieß in gewöhnlichen Graden, Minuten und Secunden? In der Tafel findet man

$$\begin{array}{rcl}
 96 \text{ Theile } 54 & = & 50^{\circ} 37' 30'',00 \\
 \text{Unterabth. } 1 & = & 0 \quad 14 \quad 3,75 \\
 \text{Th. des Vern. } 4 & = & \quad \quad 3 \quad 30,94 \\
 \hline
 & & 50 \quad 55 \quad 4,69
 \end{array}$$

Wäre jedes 96 Theil in 60 gleiche Theile durch Unterabtheilungen und einen Vernier getheilt, so fände man leicht aus ebendieser Tafel die dazu gehörigen Grade, Minuten und Secunden, weil in diesem Fall  $\frac{1}{96} = 56' 15''$ ;  $\frac{1}{60} \cdot \frac{1}{96} = 56'' 15''' = 56'',25$  u. s. w. Z. B.

$$\begin{array}{rcl}
 61 & = & 57^{\circ} 11' 15'' \\
 25 & = & \quad \quad 23 \quad 26,25 \\
 \hline
 & & 57 \quad 34 \quad 41,25
 \end{array}$$

## II. Tafel.

Wenn man bey Winkelmessungen mit dem Spiegelsextanten die beyden Bilder nicht in der Mitte des Sehefeldes zur Berührung bringt, so wird der Winkel immer zu groß gefunden (§. 86). In dem Sehefeld der Fernröhre (an der Stelle der Blendung) sind zween Fäden in gleichem Abstand von der Axe der Fernröhre und mit der Ebene des Sextanten parallel ausgespannt, welche dazu dienen, die GröÙe der *Deviation* zu bestimmen.

Gesetzt, man hätte mit obigem Sextanten (§. 22 u. f.) einen Winkel von  $115^{\circ} 23'$  gemessen und die Bilder an einer Stelle des Sehefeldes zur Berührung gebracht, welche  $\frac{1}{4}$  des ganzen Abstands der beyden Fäden von einem derselben abstund (welches durch Schätzen mit hinlänglicher Genauigkeit bestimmt werden

werden kann). Wie viel muß von dem beobachteten Winkel abgezogen werden?

Der Abstand der Fäden ist (§. 86)  $1^{\circ} 24' 30''$  und  $\frac{1}{7}$  davon  $= 16' 54''$ . Also die Deviation  $= \frac{1}{2} (1^{\circ} 24' 30'') - 16' 54'' = 25' 21''$ . Nun findet man in der zweyten Tafel für  $25'$  Deviation und für einen Winkel von  $110^{\circ}$  die Verbesserung  $= 16''$ . Bey einer Zunahme des Winkels von  $10^{\circ}$  wächst die Verbesserung um  $3''$ , also bey einem Wachsthum von  $5^{\circ} 23'$  oder  $5^{\circ},4$  um  $\frac{5,4 \cdot 3''}{10} = 1'',6$ . Ferner für  $5'$  Zunahme der Deviation wächst die Verbesserung um  $7''$ , also für  $21''$  oder  $0',35$  um  $\frac{0,35 \cdot 7''}{5} = 0'',49$ . Also hat man unmittelbar aus der Tafel

$$\begin{aligned} \text{Verbesserung} &= 16'',0 \text{ für } 110^{\circ} \text{ und Dev. } 25'. \\ \text{I. Prop. th. } \frac{5,4 \cdot 3}{10} &= + 1,6 \\ \text{II. Prop. th. } \frac{0,35 \cdot 7}{5} &= + 0,5 \\ &\hline &18'',1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{beob. Winkel} &= 115^{\circ} 23' 0,0 \\ \text{Verbess. Winkel} &= 115 \quad 22 \quad 41,9 \end{aligned}$$

### III. Tafel.

Diese Tafel enthält die mittlere astronomische Strahlenbrechung nach *Bradley* für die Barometerhöhe  $= 29,6$  engl. Zollen ( $27,775$  par. Z.) und für den Thermometerstand  $+ 50^{\circ}$

50° Fahrenheit (+ 8° des 80theil. Queksilberthermom.)

Es seye die scheinb. Höhe = 12° 11' 15",  
so findet man

$$\begin{array}{rcl} \text{für } 12^\circ 0' \text{ Refract.} & = & 4' 23'',2 \\ \text{Prop. th. } \frac{11,25.7,1}{20} & = & - 4,0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & & 4 \quad 19,2 \\ \text{scheinb. Höhe} & = & 12 \quad 11 \quad 15,0 \\ \text{wahre Höhe} & = & 12 \quad 6 \quad 55,8 \end{array}$$

Ist die wahre Höhe gegeben, so muß man mit dieser wahren Höhe (als scheinb. betrachtet) zuerst die Refraction beynahe suchen, diese zu der wahren Höhe addiren, um die scheinbare beynahe zu erhalten, vermittelst welcher man sodann die Refraction genauer findet.

Es seye die wahre Höhe = 12° 6' 55",8,  
so findet man aus der Tafel

$$\begin{array}{rcl} \text{für } 12^\circ \text{ scheinb. Höhe Refr.} & = & 4 \quad 23,2 \\ & & \hline & & 12 \quad 11 \quad 18,0 \end{array}$$

$$\text{Prop. th. für } 11',3 = \frac{11,3.7,1}{20} = 4'',06$$

$$\text{obige Refract.} \quad 4 \quad 23,20$$

$$\text{verbess. Refract.} = 4 \quad 19,14$$

sehr nahe wie oben.

Finden sich merkliche Unterschiede, so muß man mit dieser verbesserten Refraction noch einmal die scheinbare Höhe suchen und die Rechnung wiederholen.

Da man bey der Reduction der Mondsdistanzen und Berechnung des Azimuths öfters

wahre Höhen in scheinbare verwandeln muß, so hat H. v. Zach \*) hiezu eine besondere Tafel für kleine Höhen, wo die Rechnung am beschwerlichsten ist, nach *Bradley* berechnet, welche ich ihrer Brauchbarkeit wegen herseze.

wahre Höhe	Refract.	wahre Höhe	Refract.
— 0° 20'	31' 16"	4° 40'	10' 8"
+ 0 0	28 35	5 0	9 36
0 20	26 10	5 20	9 8
0 40	24 1	5 40	8 42
1 0	22 6	6 0	8 18
1 20	20 20	6 20	7 56
1 40	18 45	6 40	7 34
2 0	17 20	7 0	7 13
2 20	16 3	7 20	6 55
2 40	14 54	7 40	6 39
3 0	13 54	8 0	6 24
3 20	13 0	8 20	6 10
3 40	12 11	8 40	5 57
4 0	11 27	9 0	5 45
4 20	10 46	10 0	5 12

#### IV. Tafel.

Zur Verwandlung der mittlern Strahlenbrechung in die wahre die die IVte Tafel, welche den Stand des Barometers und Thermometers für die Zeit der Beobachtung als bekannt voraussetzt. Die Barometerhöhen sind nach pariser Zollen und Duodecimallinien angegeben. Mit der scheinbaren Höhe in der ersten Columne und dem Thermometerstand

\*) Tab. motuum © pag. 113.



stand in der obern Horizontalreihe findet man die Verbesserung der Strahlenbrechung wegen des Thermometerstands, welche, wie die Aufschrift der Tafel lehrt, abgezogen wird von der mittlern Strahlenbrechung, wenn das Thermometer über 12, und addirt, wenn es unter 12 stehet. Ebenso findet man mit der scheinb. Höhe und der Höhe des Barometers in der letzten Horizontalreihe die Verbesserung wegen des Barometerstands. Oben wurde für die scheinbare Höhe  $12^{\circ} 11' 15''$  die mittlere Strahlenbrechung gefunden  $= 4' 19'', 2$ . Der Thermometerstand seye  $+ 5^{\circ}$  Reaum. die Barometerhöhe  $= 27$  Zollen 3 Lin. Man verlangt die wahre Strahlenbrechung.

Mit der scheinb. Höhe  $10^{\circ}$  und Thermometerstand 5 findet man  $+ 10'', 0$  die Verbesserung nimmt für 5 Grad Höhenänderung um  $3'', 3$  ab, also für  $2^{\circ} 11' = 2^{\circ}, 2$  um  $\frac{3'', 3 \cdot 2, 2}{5} = 1'', 46$ , mithin ist die Verbesserung wegen des Thermometerstands  $= + 10'', 0 - 1'', 46 = + 8'', 54$ .

Mit der scheinbaren Höhe  $10^{\circ}$  und dem Barometerstand 27 Z. 3 Lin. findet man die Verbesserung  $= - 11, 4$ . Der Proportionaltheil ist  $\frac{3'', 8 \cdot 2, 2}{5} = 1, 67$ , folglich ist, weil die Verbesserung mit der Höhe abnimmt, die zu  $12^{\circ} 11'$  gehörige  $= - (11'', 4 - 1'', 67) = - 9'', 73$ , also die Summe von beyden  $= + 8'', 54 - 9'', 73 = - 1'', 19$ , und die wahre Strahlenbrechung  $= 4' 19'', 2 - 1'', 2 = 4' 18'', 0$ .

Li a

Scheinb.

Scheinb. Höhe $10^{\circ}$	} Verbess. = $\dagger 10'',0$	
Therm. $+ 5$		
I. Prop. theil = $\frac{3,3. 2,2}{5}$	=	- $1''46$
Sch. Höhe $10^{\circ}$	} Verbess. =	- $11,40$
Barom. 27 Z. 3		
II. Prop. th. = $\frac{3,8. 2,2}{5}$	= $\dagger 1,67$	
		$\dagger 11,67$   - $12,86$
		$\dagger 11,67$
		- $1,19$

Die Tafel ist nicht auf Grade unter dem Gefrierpunct ausgedehnt, weil man bey so grossen Veränderungen der Temperatur der Luft die Strahlenbrechung nicht mehr mit Sicherheit durch die gewöhnliche Mayersche Regel auf die wahren reduciren kann. In diesem Fall muß man sich der Mayerschen Formel (§. 81 S. 113. u. Zusaz zu §. 81) bedienen.

### V. Tafel.

Wegen der Parallaxe der Sonne müssen ihre Höhen ausser der Strahlenbrechung noch durch die Höhenparallaxe verbessert werden, welche zu den wegen der Refraction schon verbesserten Höhen addirt werden muß, um die wahren Höhen zu erhalten. Die Tafel hat gedoppelte Eingänge, weil die Höhenparallaxe sowohl von der Sonnenhöhe als auch von ihrem Abstand von der Erde (oder, weil sich die Erdferne nur langsam bewegt, von der

der Jahrszeit) abhängt. Hätte man z. B. im September die Höhe der Sonne  $= 12^{\circ} 11' 15''$  gefunden, so wäre die durch Strahlenbrechung verbesserte Höhe  $= 12^{\circ} 6' 55'',8$ . Hat man den obern Sonnenrand genommen, so muß der Halbmesser der Sonne ( $15' 55''$ ) abgezogen werden, und man erhält  $11^{\circ} 51' 0'',8$ . Nun ist im September für  $12^{\circ}$  Höhe die Höhenparallaxe  $= 8'',2$ , also die wahre Sonnenhöhe  $= 11^{\circ} 50' 52'',6$ .

## VI. *Tafel.*

Diese Tafel dient zur Abkürzung der Rechnung bey der Reduction der Höhen auf den Mittag, wenn sie nahe bey demselben sind beobachtet worden. Mit den Formeln §. 134 S. 224 findet man leicht die Höhenänderung in einer Minute vor oder nach der Culmination. Diese kann man ebenfalls in eine Tafel mit gedoppelten Eingängen bringen, welche die Breite und Abweichung zu Argumenten hat. Wenn man aber die Höhenänderung genau verlangt, so muß die Tafel nicht blos für einzelne Grade der Breite und Abweichung berechnet werden, wodurch sie ziemlich weitläufig wird. Auch ist das Interpoliren wegen der gedoppelten Eingänge beschwerlich, so daß man die Höhenänderung in einer Minute beynahe ebenso leicht durch die Formel selbst findet. Wenn die Breite  $\varphi$ , die nördliche Abweichung  $\delta$  (die südliche  $-\delta$ ) heißt, so ist die Höhenänderung in einer Minute vor oder nach der Cul-

mination  $= \frac{1,96345 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \delta}{\sin (\varphi \mp \delta)}$  und der

Logarithme von  $1,96345 = 0,2930199$ . Es seye  $\varphi = 51^{\circ} 32'$ ;  $\delta = 11^{\circ} 20'$ . So wird die Rechnung auf folgende Art geführt:

$$\begin{array}{rcl} \varphi = 51^{\circ} 32' & \text{Lg cos} = & 9,7938317 - 10 \\ \delta = 11 \quad 20 & \text{Lg cos} = & 9,9914477 - 10 \\ \hline \varphi - \delta = 40 \quad 12 & \text{C. Lg sin} = & 0,1901322 \\ & \text{Lg const.} = & 0,2930199 \\ & & \hline & & 0,2684315 \end{array}$$

Höhenänd. in 1 Min.  $= 1'',855$

Diese Höhenänderung mit dem Quadrat der Anzahl von Minuten vor oder nach der Culmination multiplicirt gibt die Höhenänderung für dieselbige. Die Höhe seye  $5' 23''$  vor oder nach der Culmination genommen, so findet man in der VIten Tafel das Quadrat von  $5' 22'' = 28,80$  und von  $5' 24'' = 29,16$ , also von  $5' 23'' = \frac{28,80 + 29,16}{2} = 28,98$  und  $(1,855) (28,98) = 53'',7$ . Um so viel wäre die Höhe  $5' 23''$  vor oder nach der Culmination kleiner als die Mittagshöhe.

Eine andere Höhe seye  $8' 40''$  von dem Mittag entfernt, so findet man  $(8' 40'')^2 = 75,1$  und die Höhenänderung in  $8' 40'' = 1'',855 \cdot 75,1 = 139'',3 = 2' 19'',3 =$  dem Unterschied zwischen jener Höhe und der Mittagshöhe.

Bey der Reduction der Sonnenhöhen muß auch die Veränderung der Abweichung der Sonne in Rechnung gebracht werden. Es seye

seye die Mittagshöhe  $= H$ , eine Höhe  $n$  Minuten vor oder nach Mittag  $= h$ , die Höhenänderung in einer Minute (nach obiger Formel berechnet)  $= \Delta h$ , die Veränderung der Abweichung der Sonne in 1 Minute, in Sekunden ausgedrückt,  $= \Delta \delta$ ; so hat man, wenn die Sonne in den *aufsteigenden* Zeichen ist (die nördliche Abweich. wächst, die südliche abnimmt)

$$\left. \begin{aligned} H-h &= n^2 \cdot \Delta h + n \cdot \Delta \delta \text{ vormittäg.} \\ &= n^2 \cdot \Delta h - n \cdot \Delta \delta \text{ nachmittäg.} \end{aligned} \right\} \text{Höhen.}$$

und wenn die Sonne in den *niedersteigenden* Zeichen ist

$$\left. \begin{aligned} H-h &= n^2 \cdot \Delta h - n \cdot \Delta \delta \text{ vormitt.} \\ &= n^2 \cdot \Delta h + n \cdot \Delta \delta \text{ nachmitt.} \end{aligned} \right\} \text{Höhen.}$$

Die *Mittagsverbesserung* für correspondirende Höhen, die nicht über 10 Minuten vom Mittag entfernt sind, in Minuten ausgedrückt ist

$$= \mp \frac{\Delta \delta}{2 \Delta h}$$

— für aufsteigende, + für niedersteigende Zeichen.

## Verbesserungen.

- Seite 61. statt §. 45. lies §. 46.  
 — 63. — §. 37. — §. 48.  
 — 76. — §. 22. — §. 59.  
 — 140. Lin. 10. von unten fehlt nach dem Bruch  $\frac{1}{2}$   
 das Gleichheitszeichen.  
 — 152. statt §. 74. lies §. 100.  
 — 184. — §. 99. — §. 116.  
 — 211. Lin. 8. statt 9"55 l. 9",55  
 — — — — 7"05 — 7",05  
 — 230. Lin. 4. statt  $\left(\frac{\text{tang } \lambda}{\sin D}\right)^2$  lies  $\left(\frac{\text{tang } \lambda}{\sin D}\right)^2$   
 — — Lin. 6. statt  $\text{Lg } \frac{1}{2}$  l.  $\text{Lg } \frac{1}{6}$ .  
 — 241. Lin. 3. von unten, statt: dem Unterschied l.  
 der Summe.  
 — 242. Lin. 2. statt: der Summe l. dem Unterschied.  
 — 249. — 3. v. u. statt 10,326 l. 10,674.  
 — 254. — 6. st. 5,55 l. 55,5.  
 — 286. — 10. st. rechnen l. nehmen.  
 — 307. — 2. st. 3<sup>St</sup> 30' 17",7 l. 3<sup>St</sup> 30' 11",7  
 — 339. st.  $\sqrt{\phantom{x}}$  l. durchaus  $\gamma$ .  
 — — Lin. 4. v. u. statt  $w$  l.  $\omega$ .  
 — 391. — 3. muß \* gleich nach sec. lat. stehen.

## I. Tafel.

Verwandlung der 96 Theilung in Grade, Minuten  
und Secunden.

96 T.	°	'	"	96 T.	°	'	"	96 T.	°	'	"
1	0	56	15	33	30	56	15	65	60	56	15
2	1	52	30	34	31	52	30	66	61	52	30
3	2	48	45	35	32	48	45	67	62	48	45
4	3	45	0	36	33	45	0	68	63	45	0
5	4	41	15	37	34	41	15	69	64	41	15
6	5	37	30	38	35	37	30	70	65	37	30
7	6	33	45	39	36	33	45	71	66	33	45
8	7	30	0	40	37	30	0	72	67	30	0
9	8	26	15	41	38	26	15	73	68	26	15
10	9	22	30	42	39	22	30	74	69	22	30
11	10	18	45	43	40	18	45	75	70	18	45
12	11	15	0	44	41	15	0	76	71	15	0
13	12	11	15	45	42	11	15	77	72	11	15
14	13	7	30	46	43	7	30	78	73	7	30
15	14	3	45	47	44	3	45	79	74	3	45
16	15	0	0	48	45	0	0	80	75	0	0
17	15	56	15	49	45	56	15	81	75	56	15
18	16	52	30	50	46	52	30	82	76	52	30
19	17	48	45	51	47	48	45	83	77	48	45
20	18	45	0	52	48	45	0	84	78	45	0
21	19	41	15	53	49	41	15	85	79	41	15
22	20	37	30	54	50	37	30	86	80	37	30
23	21	33	45	55	51	33	45	87	81	33	45
24	22	30	0	56	52	30	0	88	82	30	0
25	23	26	15	57	53	26	15	89	83	26	15
26	24	22	30	58	54	22	30	90	84	22	30
27	25	18	45	59	55	18	45	91	85	18	45
28	26	15	0	60	56	15	0	92	86	15	0
29	27	11	15	61	57	11	15	93	87	11	15
30	28	7	30	62	58	7	30	94	88	7	30
31	29	3	45	63	59	3	45	95	89	3	45
32	30	0	0	64	60	0	0	96	90	0	0

Unterabtheilungen der 96 Theile.

	°	'	"		°	'	"		°	'	"		°	'	"
1	14	3,75	2	28	7,5	3	42	11,25	4	56	15,0				

## Theile des Vernier.

	'	"		'	"		'	"		'	"
1	0.	52.73	5	4.	23.67	9	7.	54.61	13	11.	25.55
2	1.	45.47	6	5.	16.41	10	8.	47.34	14	12.	18.28
3	2.	38.20	7	6.	9.14	11	9.	40.08	15	13.	11.01
4	3.	30.94	8	7.	1.87	12	10.	32.81	16	14.	3.75

## II. Tafel.

Verbesserungen wegen der Abweichung der Ebene, in welcher man die Berührung beobachtet.

beob. Wink.	Größe der Deviation.													
	10'		15'		20'		25'		30'		35'		40'	
0°	0'	0"	0'	0"	0'	0"	0'	0"	0'	0"	0'	0"	0'	0"
10		0		0		1		1		2		2		3
20		0		1		1		2		3		4		5
30		0		1		2		3		4		6		8
40		1		1		3		4		6		8		10
50		1		2		3		5		8		10		13
60		1		2		4		6		9		12		16
70		1		3		5		8		11		15		20
80		1		3		6		9		13		18		24
90		2		4		7		11		16		21		28
100		2		5		9		13		19		26		34
110		3		6		10		16		23		31		40
120		3		7		12		19		27		37		48
130		4		8		15		23		34		46	I.	0
140		5		11		19		30		43		59	I.	17
150		6		15		26		41		59	I.	20	I.	44
160		10		22		40	I.	2	I.	29	2.	1	2	38
170		20		44	I.	19	2.	3	2.	58	4.	2	5	16
180	20.	0	30.	0	40.	0	50.	0	60.	0	70.	0	80.	0



## III. Tafel.

## Mittlere astron. Strahlenbrechung.

Scheinb. Höhe.	Stralenbr.	Diff.	Scheinb. Höhe.	Stralenbr.	Diff.
0° 0'	33' 0",0	49,6	3° 0'	14' 35,6	31,7
5	32 10,4	48,2	10	14 3,9	29,8
10	31 22,2	46,8	20	13 34,1	27,9
15	30 35,4	45,7	30	13 6,2	26,6
20	29 49,7	44,3	40	12 39,6	25,0
25	29 5,4	43,1	50	12 14,6	23,5
30	28 22,3	41,9	4	11 51,1	22,2
35	27 40,4	40,7	10	28,9	21,0
40	26 59,7	39,5	20	7,9	19,9
45	26 20,2	38,4	30	10 48,0	18,8
50	25 41,8	37,2	40	29,2	17,9
1	25 4,6	36,0	50	11,3	16,8
0	24 28,6	34,9	5	9 54,5	16,3
5	23 53,7	33,9	10	38,2	15,4
10	23 19,8	32,8	20	22,8	14,8
15	22 47,0	31,8	30	8,0	14,0
20	22 15,2	30,8	40	54,0	13,4
25	21 44,4	29,7	50	40,6	13,0
30	21 14,7	28,8	6	27,6	12,7
35	20 45,9	28,0	10	14,9	12,1
40	20 17,9	27,0	20	11,7	11,7
45	19 50,9	26,1	30	7 51,1	10,8
50	19 24,8	25,3	40	40,3	10,1
55	19 59,5	24,5	50	30,2	9,8
2	18 35,0	24,6	7	20,9	9,8
10	17 48,4	23,9	10	11,1	9,0
20	17 4,5	20,7	20	2,1	8,7
30	16 23,8	18,4	30	6 53,4	8,3
40	15 45,4	16,0	40	45,1	8,0
50	15 9,4		50	37,1	

## III. Tafel.

Mittlere astron. Strahlenbrechung.

Scheinb. Höhe.	Strahlenbr.	Diff.	Scheinb. Höhe.	Strahlenbr.	Diff.
8° 0'	6' 20",5	7,5	15° 30'	5' 23",2	6,5
10	22,0	7,2	16 0	16,7	6,1
20	14,8	6,8	16 30	10,6	5,9
30	8,0	6,7	17 0	4,7	5,6
40	1,3	6,5	17 30 2	59,1	5,2
50	54,8	6,4	18 0	53,9	4,9
9 0	48,4	6,0	18 30	49,0	4,7
10	42,4	5,9	19 0	44,3	4,5
20	36,5	5,6	19 30	39,8	4,3
30	30,9	5,5	20 0	35,5	4,1
40	25,4	5,4	20 30 2	31,4	3,9
50	20,0	5,2	21 0	27,5	3,7
10 0	14,8	7,5	21 30	23,8	3,5
15	7,3	7,2	22 0	20,3	6,7
30	0,1	6,9	23 0	13,6	6,2
45	53,2	6,4	24 0 2	7,4	5,7
11 0	46,8	6,5	25 0	1,7	5,3
15	40,3	6,0	26 0 1	56,4	4,9
30	34,3	5,7	27 0	51,5	4,7
45	28,6	5,3	28 0	46,8	4,3
12 0 4	23,2	7,1	29 0 1	42,5	4,1
20	16,1	6,7	30 0	38,4	3,8
40	9,4	6,4	31 0	34,6	3,6
13 0	3,0	6,1	32 0	31,0	3,5
20 3	56,9	5,8	33 0 1	27,5	3,2
40	51,1	5,6	34 0	24,3	3,1
14 0	45,5	5,2	35 0	21,2	2,9
20	40,3	5,1	36 0	18,3	2,8
40	35,2	5,0	37 0	15,5	2,7
15 0	30,2		38 0	12,8	

## III. Tafel.

## Mittlere astron. Strahlenbrechung.

Scheinb. Höhe.	Stralenbr.	Diff.	Scheinb. Höhe.	Stralenbr.	Diff.
39° 0'	1' 10",2		65° 0' 0"	26",6	1",2
40 0	7,8	2,4	66 0	25,4	1,2
41 0	5,4	2,4	67 0	24,2	1,2
42 0	3,2	2,2	68 0	23,0	1,1
43 0	1,0	2,2	69 0	21,9	1,1
		2,1			1,1
44 0	58,9	2,0	70 0	20,8	1,2
45 0	56,9	1,9	71 0	19,6	1,1
46 0	55,0	1,9	72 0	18,5	1,1
47 0	53,1	1,8	73 0	17,4	1,1
48 0	51,3	1,8	74 0	16,3	1,0
		1,7			1,1
49 0	49,5	1,7	75 0	15,3	1,1
50 0	47,8	1,7	76 0	14,2	1,1
51 0	46,1	1,6	77 0	13,1	1,1
52 0	44,5	1,6	78 0	12,1	1,1
53 0	42,9	1,5	79 0	11,1	1,1
		1,5			1,0
54 0	41,4	1,5	80 0	10,0	1,0
55 0	39,9	1,5	81 0	9,0	1,0
56 0	38,4	1,4	82 0	8,0	1,0
57 0	37,0	1,4	83 0	7,0	1,0
58 0	35,6	1,4	84 0	6,0	1,0
		1,3			1,0
59 0	34,2	1,3	85 0	5,0	1,0
60 0	32,9	1,3	86 0	4,0	1,0
61 0	31,6	1,3	87 0	3,0	1,0
62 0	30,3	1,3	88 0	2,0	1,0
63 0	29,0	1,2	89 0	1,0	1,0
64 0	27,8		90 0	0,0	

## IV. Tafel.

Verbesserung der mittlern Strahlenbrechung.

Grade des Reaumur'schen Thermometers über 0.							
Scheinb. Höhe.	24 0	23 1	22 2	21 3	20 4	19 5	subtr. add.
0° 0'	1' 48",0	1' 39",0	1' 30",0	1' 21",0	1' 12",0	1' 3",0	
10	1 42,7	1 34,1	1 25,6	1 17,0	1 8,4	0 59,9	
20	1 37,6	1 29,5	1 21,4	1 13,2	1 5,1	0 56,9	
30	1 32,9	1 25,1	1 17,4	1 9,6	1 1,9	0 54,2	
40	1 28,3	1 21,0	1 13,6	1 6,3	0 58,9	0 51,5	
50	1 23,9	1 16,9	1 9,9	1 2,9	0 55,9	0 48,9	
1 0	1 20,1	1 13,4	1 6,8	1 0,1	0 53,4	0 46,7	
20	1 12,8	1 6,8	1 0,7	0 54,6	0 48,6	0 42,5	
40	1 6,4	1 0,9	0 55,4	0 49,8	0 44,3	0 38,8	
2 0	1 0,8	0 55,8	0 50,7	0 45,6	0 40,5	0 35,5	
30	0 54,5	0 50,0	0 45,4	0 40,9	0 36,4	0 31,8	
3 0	47,8	43,8	39,8	35,8	31,8	27,9	
30	42,9	39,3	35,7	32,3	28,7	25,1	
4 0	38,8	35,6	32,3	29,1	25,9	22,6	
5 0	32,4	29,7	27,0	24,3	21,6	18,9	
6 0	27,7	25,4	23,1	20,8	18,5	16,2	
7 0	24,0	22,0	20,0	18,0	16,0	14,0	
8 0	21,2	19,5	17,7	15,9	14,2	12,4	
9 0	19,0	17,4	15,8	14,3	12,7	11,1	
10 0	17,2	15,7	14,3	12,9	11,4	10,0	
15 0	11,5	10,5	9,6	8,6	7,6	6,7	
20 0	8,5	7,8	7,1	6,4	5,7	4,9	
25 0	6,5	6,1	5,5	5,0	4,4	3,9	
30 0	5,4	4,9	4,5	4,0	3,6	3,1	
40 0	3,7	3,4	3,1	2,8	2,5	2,2	
50 0	2,6	2,4	2,2	2,0	1,7	1,5	
60 0	1,8	1,6	1,5	1,3	1,2	1,0	
70 0	1,1	1,0	0,9	0,9	0,8	0,7	
80 0	0,6	0,5	0,5	0,4	0,4	0,3	
90 0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
Barom. Höhe.	26 9	26 10,5	27 0	27 1,5	27 3	27 4,5	subtr.
			29 6	29 4,5	29 3	29 1,5	add.

## IV. Tafel.

## Verbesserung der mittlern Strahlenbrechung.

Grade der Reaumurischen Thermometers über 0.								
Scheinb. Höhe.	18 6	17 7	16 8	15 9	14 10	13 11	12 12	subtr. add.
0° 0'	54",0	45",0	36",0	27",0	18",0	9",0	0,0	
10	51,3	42,8	34,2	25,7	17,1	8,6	0,0	
20	48,8	40,7	32,5	24,4	16,3	8,1	0,0	
30	46,4	38,7	30,9	23,2	15,5	7,7	0,0	
40	44,2	36,8	29,4	22,1	14,7	7,4	0,0	
50	42,0	35,0	28,0	21,0	14,0	7,0	0,0	
1 0	40,1	33,4	26,7	20,0	13,4	6,7	0,0	
20	36,4	30,3	24,3	18,2	12,1	6,1	0,0	
30	33,2	27,7	22,1	16,6	11,1	5,5	0,0	
2 0	30,4	25,3	20,3	15,2	10,1	5,1	0,0	
30	27,3	22,7	18,2	13,6	9,1	4,5	0,0	
3 0	23,9	19,9	15,9	11,9	8,0	4,0	0,0	
30	21,5	18,0	14,4	10,8	7,1	3,6	0,0	
4 0	19,4	16,2	12,9	9,7	6,5	3,2	0,0	
5 0	16,2	13,5	10,8	8,1	5,4	2,7	0,0	
6 0	13,8	11,5	9,2	6,9	4,6	2,3	0,0	
7 0	12,0	10,0	8,0	6,0	4,0	2,0	0,0	
8 0	10,6	8,9	7,1	5,3	3,5	1,8	0,0	
9 0	9,5	7,9	6,3	4,8	3,2	1,6	0,0	
10 0	8,6	7,2	5,7	4,3	2,9	1,4	0,0	
15 0	5,7	4,8	3,8	2,9	1,9	1,0	0,0	
20 0	4,2	3,5	2,8	2,1	1,4	0,7	0,0	
25 0	3,3	2,8	2,2	1,7	1,1	0,6	0,0	
30 0	2,7	2,2	1,8	1,3	0,9	0,4	0,0	
40 0	1,8	1,5	1,2	0,9	0,6	0,3	0,0	
50 0	1,3	1,1	0,9	0,7	0,4	0,2	0,0	
60 0	0,9	0,7	0,6	0,4	0,3	0,1	0,0	
70 0	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0	
80 0	0,3	0,2	0,2	0,1	0,1	0,0	0,0	
90 0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	
Barom. Höhe.	27 6		27 9		28 0		28 3 subtr.	
	29 0		28 9		28 6		28 3 add.	



VI. Tafel  
Quadrate der Stundenwinkel.

<i>n</i>	0'	1'	2'	3'	4'
0	0,00	1,00	4,00	9,00	16,00
2	0,00	1,07	4,13	9,20	16,27
4	0,00	1,14	4,27	9,40	16,53
6	0,01	1,21	4,41	9,61	16,81
8	0,02	1,28	4,55	9,82	17,08
10	0,03	1,36	4,69	10,03	17,36
12	0,04	1,44	4,84	10,24	17,64
14	0,05	1,52	4,98	10,45	17,92
16	0,07	1,60	5,13	10,67	18,20
18	0,09	1,69	5,29	10,89	18,49
20	0,11	1,78	5,44	11,11	18,77
22	0,13	1,87	5,60	11,33	19,06
24	0,16	1,96	5,76	11,56	19,36
26	0,19	2,06	5,92	11,78	19,65
28	0,22	2,15	6,08	12,01	19,94
30	0,25	2,25	6,25	12,25	20,25
32	0,28	2,35	6,42	12,48	20,55
34	0,32	2,45	6,59	12,72	20,85
36	0,36	2,56	6,76	12,96	21,16
38	0,40	2,66	6,94	13,20	21,46
40	0,44	2,77	7,11	13,44	21,77
42	0,49	2,89	7,29	13,69	22,09
44	0,54	3,00	7,47	13,93	22,40
46	0,59	3,12	7,65	14,18	22,72
48	0,64	3,24	7,84	14,44	23,04
50	0,69	3,36	8,02	14,69	23,36
52	0,75	3,48	8,21	14,95	23,68
54	0,81	3,61	8,41	15,21	24,01
56	0,87	3,73	8,60	15,47	24,33
58	0,93	3,86	8,80	15,73	24,66
60	1,00	4,00	9,00	16,00	25,00

## VI. Tafel.

Quadrate der Stundenwinkel.

"	5'	6'	7'	8'	9'
0	25,00	36,00	49,00	64,00	81,00
2	25,33	36,40	49,46	64,53	81,60
4	25,66	36,80	49,93	65,06	82,21
6	26,01	37,21	50,41	65,61	82,81
8	26,35	37,61	50,88	66,15	83,41
10	26,69	38,02	51,36	66,69	84,03
12	27,04	38,44	51,84	67,24	84,64
14	27,38	38,85	52,31	67,78	85,26
16	27,73	39,26	52,79	68,33	85,87
18	28,09	39,69	53,29	68,89	86,49
20	28,44	40,11	53,77	69,44	87,11
22	28,80	40,53	54,26	70,00	87,73
24	29,16	40,96	54,76	70,56	88,36
26	29,51	41,38	55,25	71,12	88,99
28	29,88	41,81	55,75	71,69	89,62
30	30,25	42,25	56,25	72,25	90,25
32	30,62	42,68	56,75	72,81	90,89
34	30,99	43,12	57,25	73,38	91,53
36	31,36	43,56	57,76	73,96	92,16
38	31,73	44,00	58,26	74,53	92,80
40	32,10	44,44	58,77	75,10	93,45
42	32,49	44,89	59,29	75,69	94,09
44	32,87	45,32	59,79	76,27	94,74
46	33,25	45,78	60,01	76,85	95,39
48	33,64	46,24	60,84	77,44	96,04
50	34,02	46,69	61,36	78,02	96,69
52	34,41	47,15	61,88	78,61	97,35
54	34,81	47,61	62,41	79,21	98,01
56	35,20	48,07	62,93	79,80	98,67
58	35,60	48,53	63,46	80,40	99,34
60	36,00	49,00	64,00	81,00	100,00







Fig. 2.

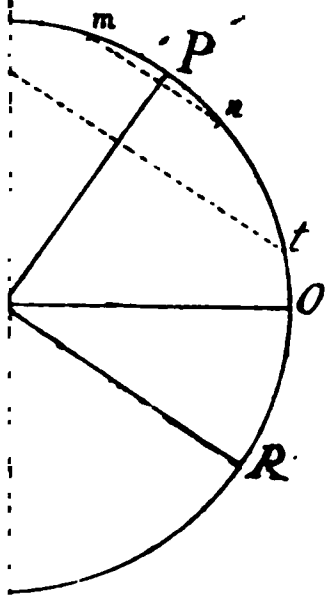


Fig. 3.

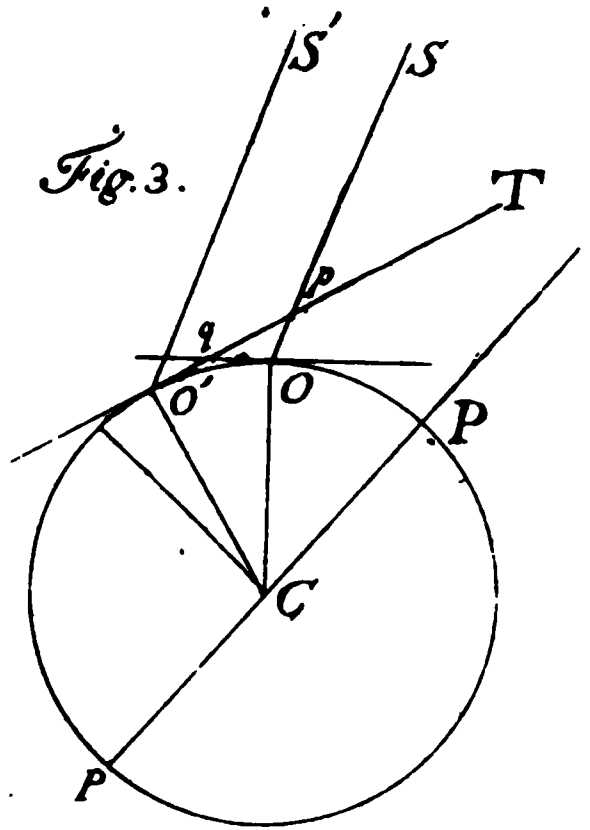


Fig. 5.

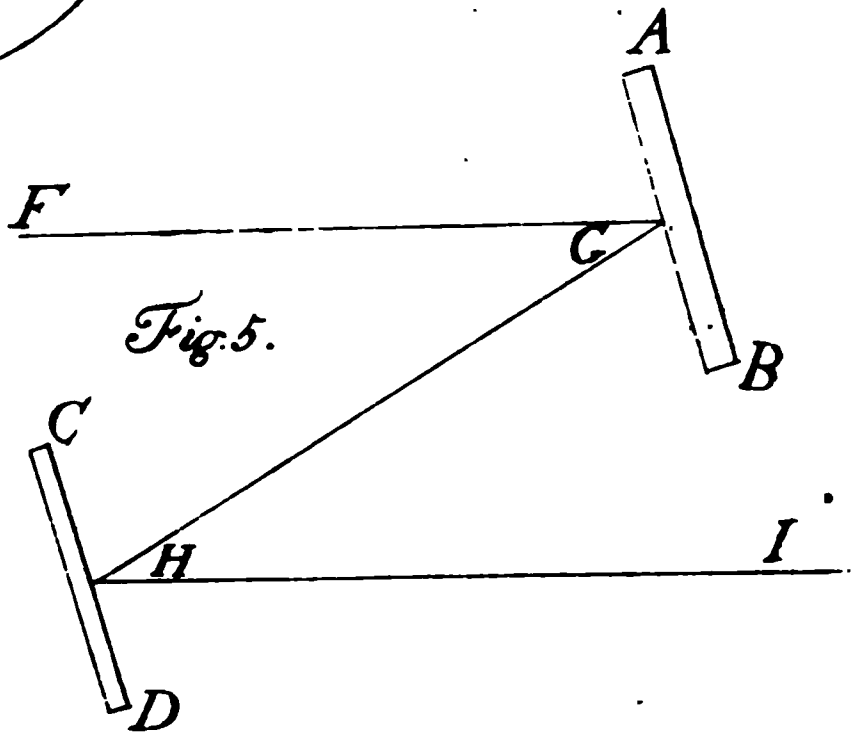
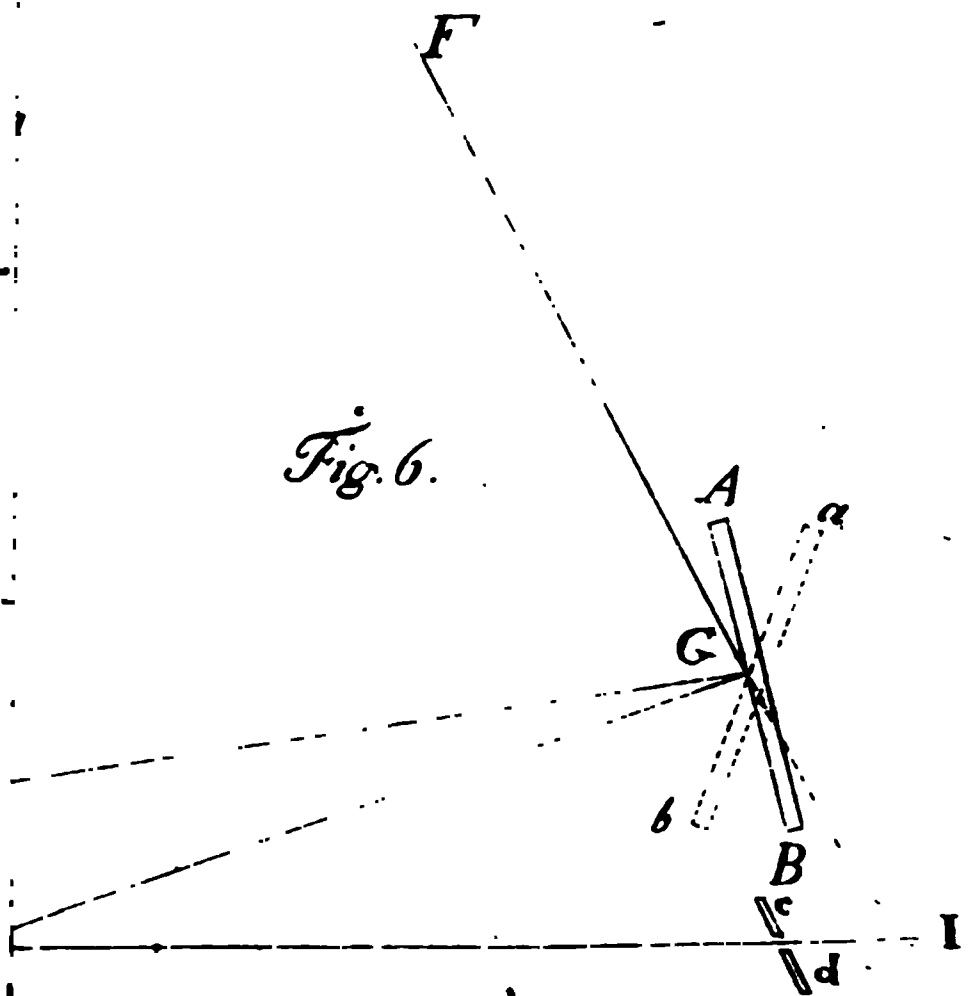


Fig. 6.





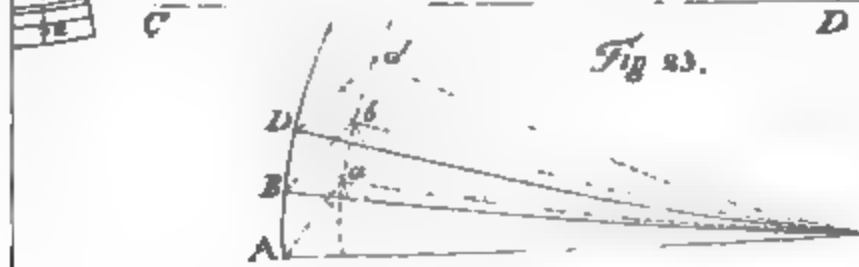
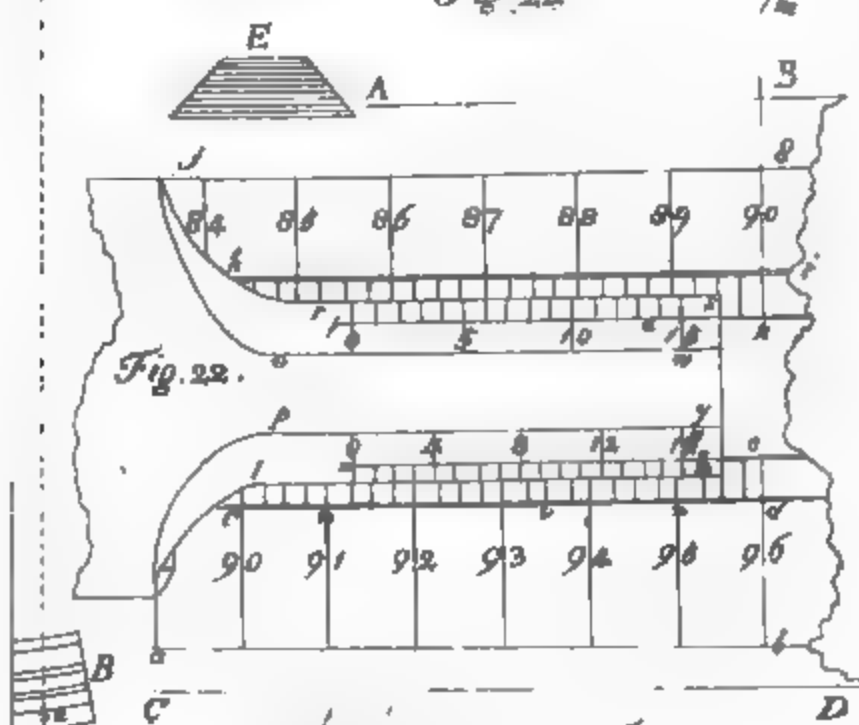
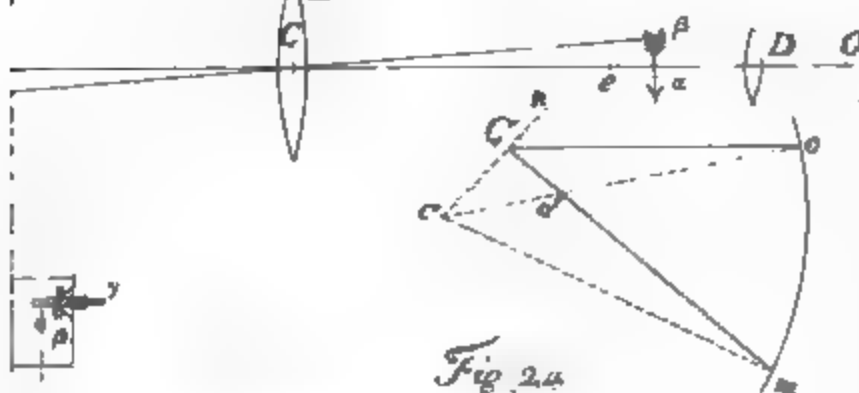
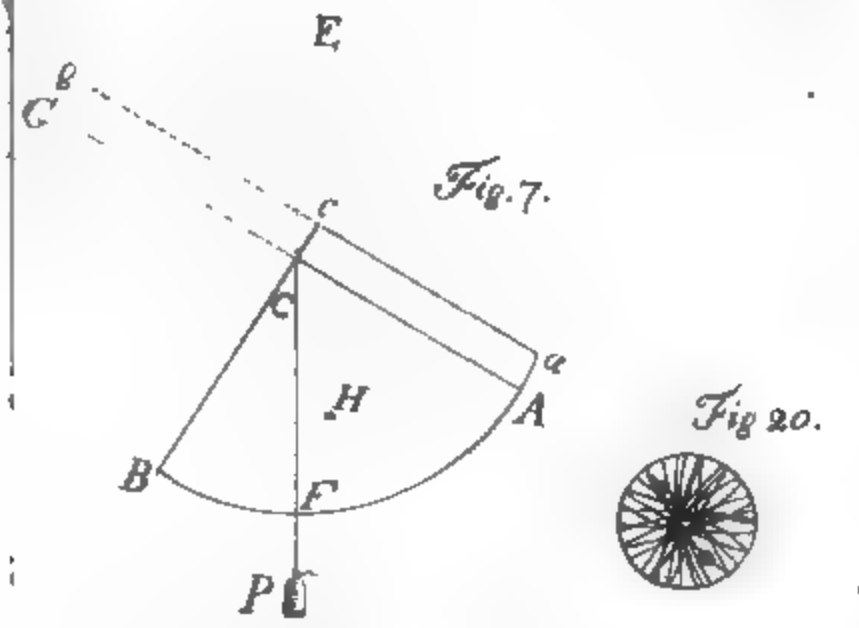
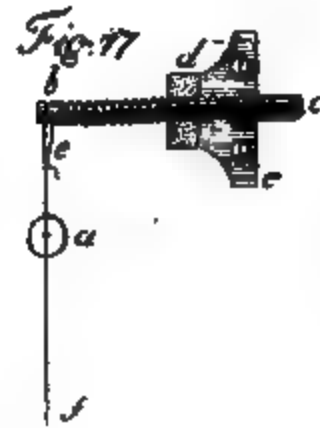
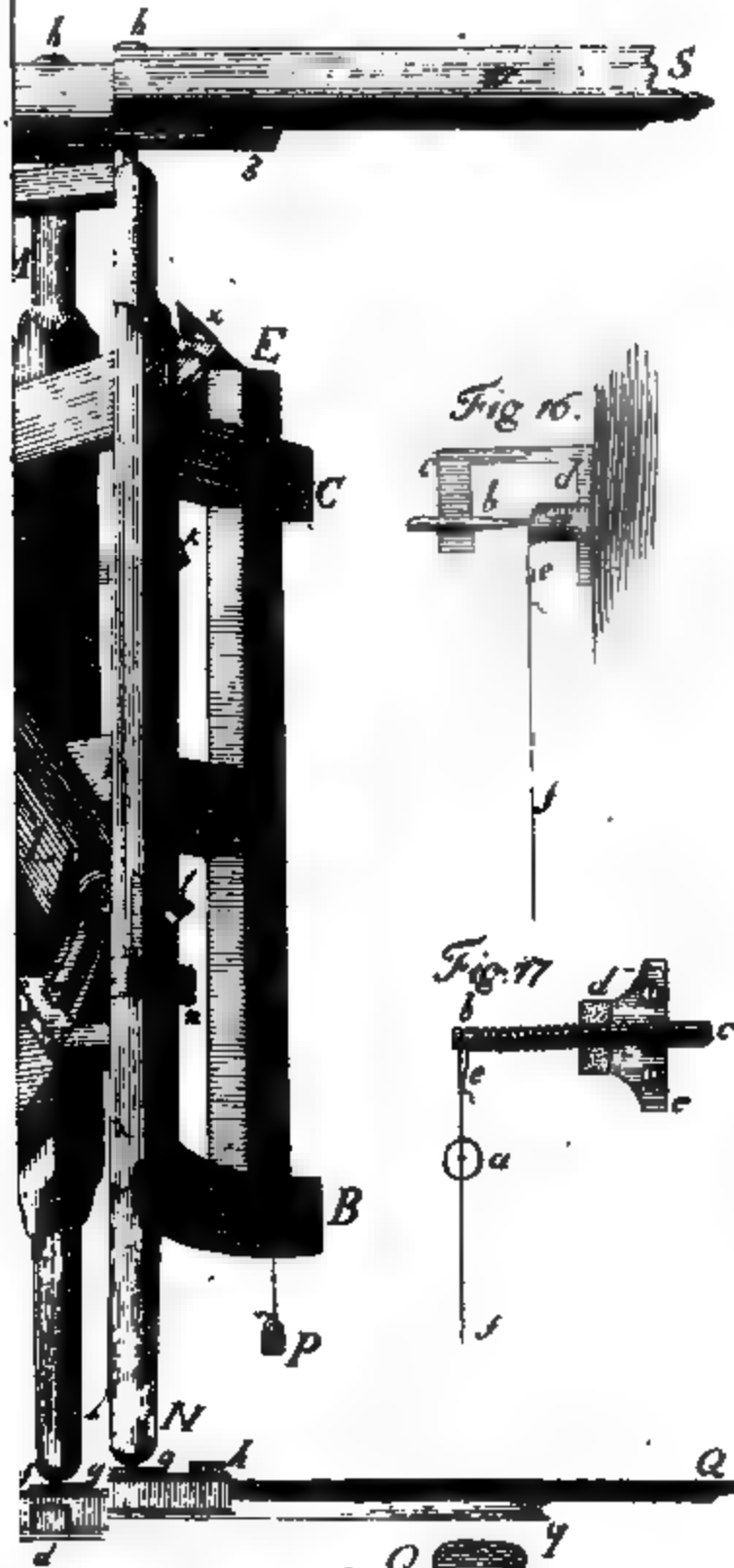


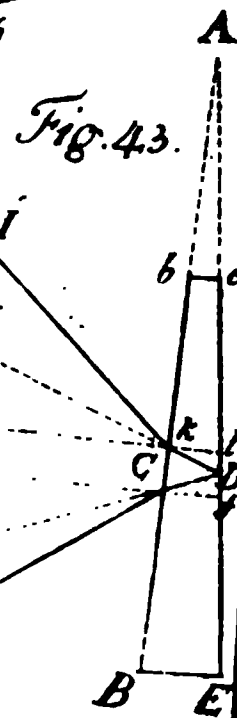
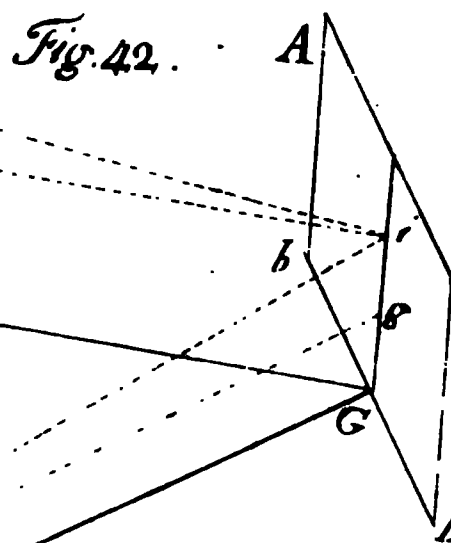
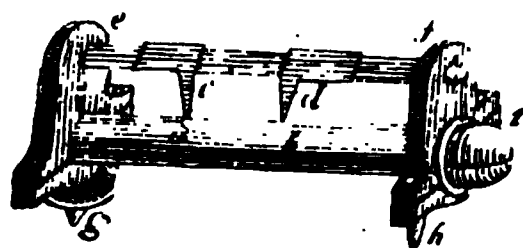
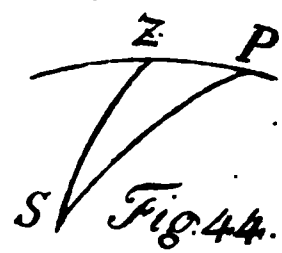
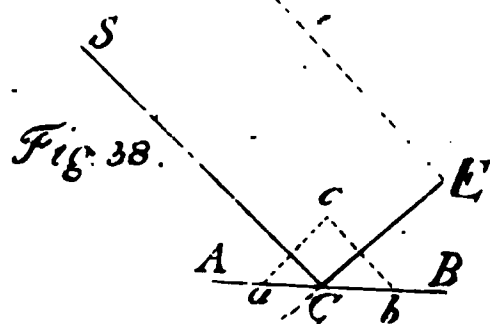
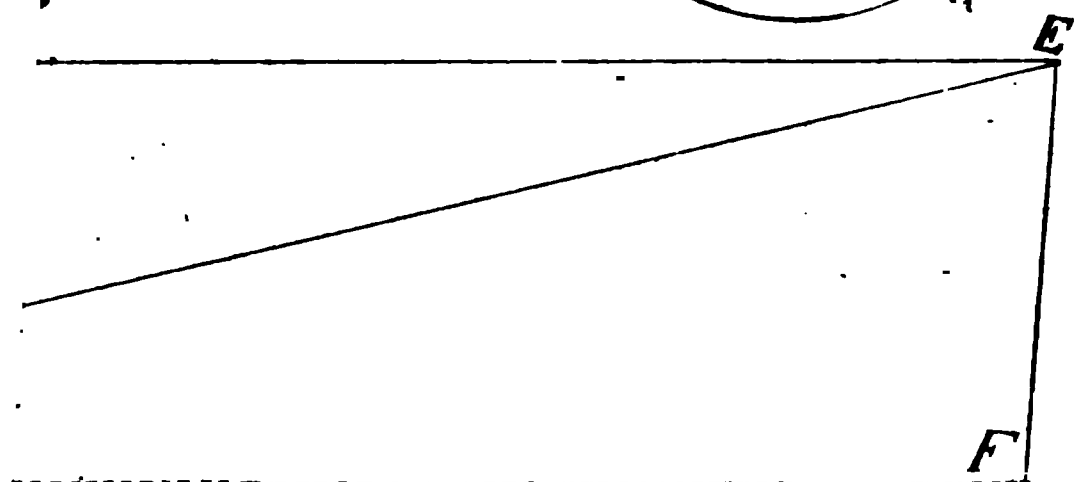
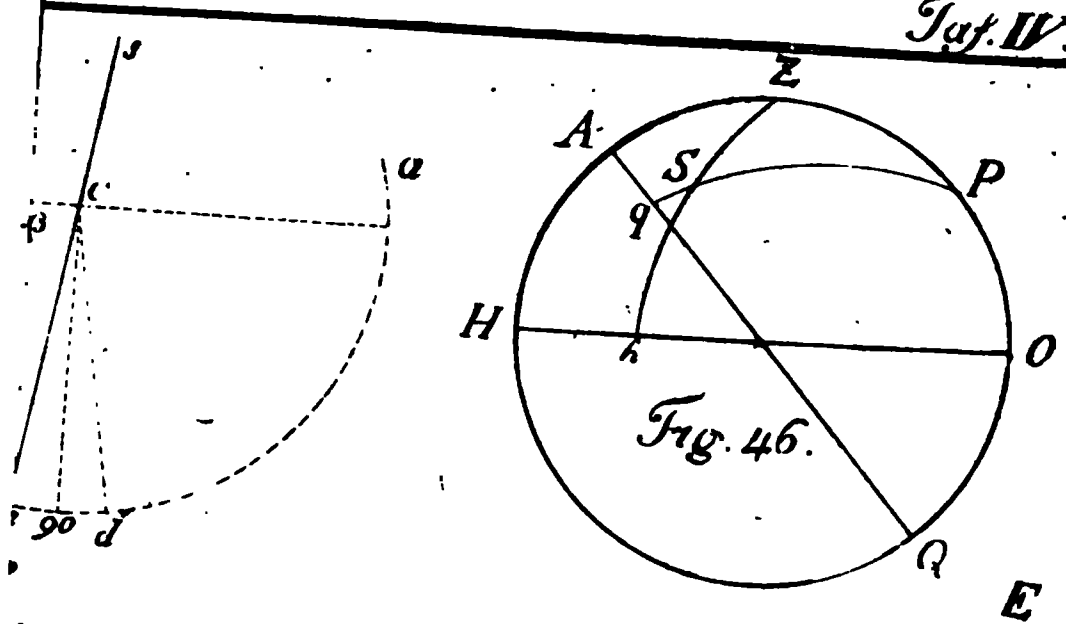


Fig. III.











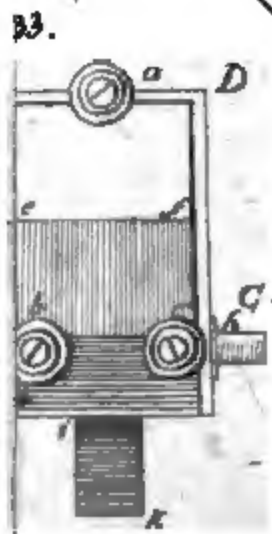
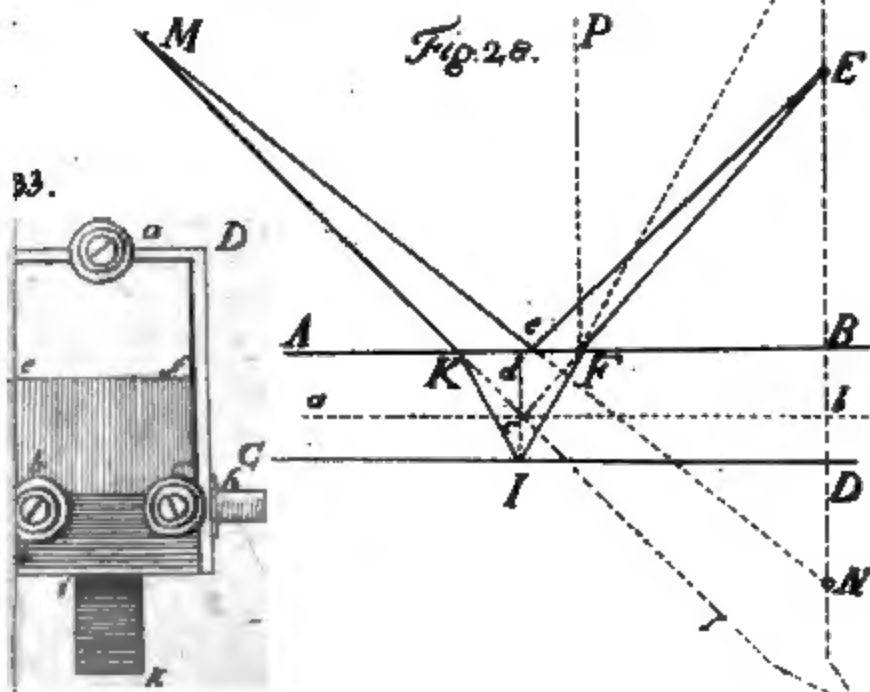
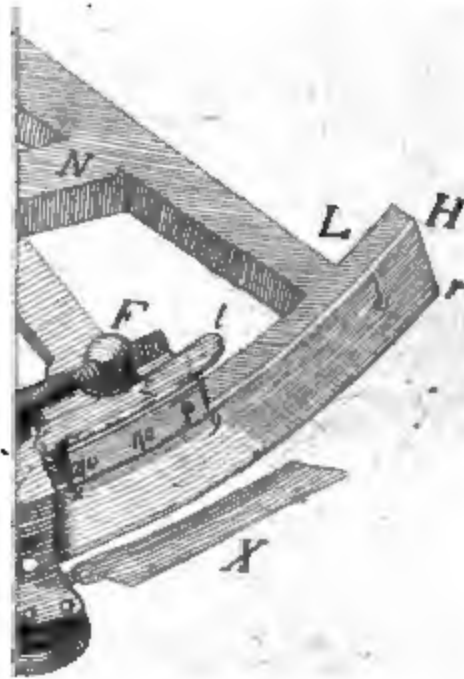
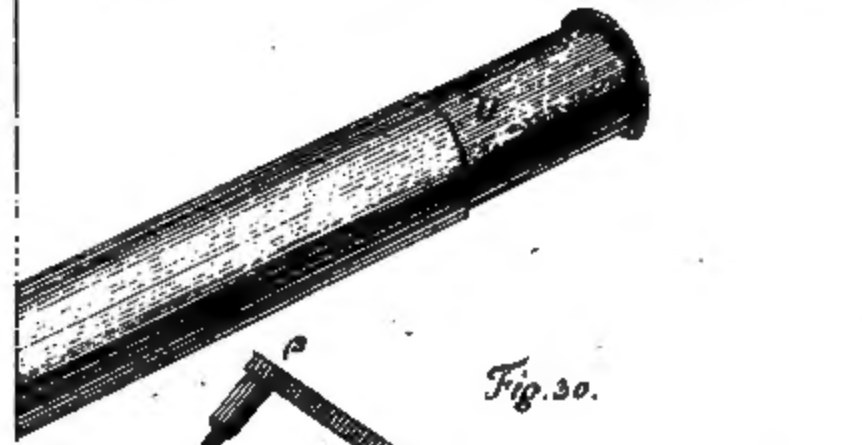




Fig. 58.

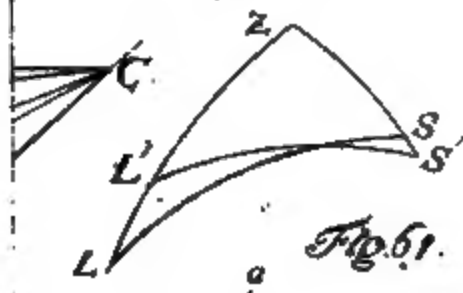


Fig. 61.

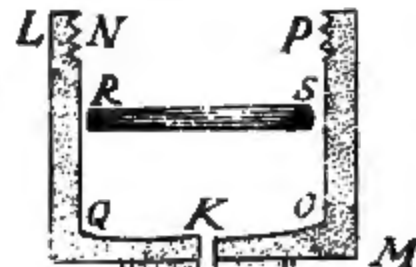
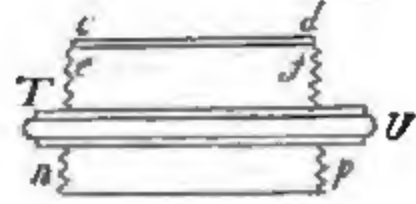
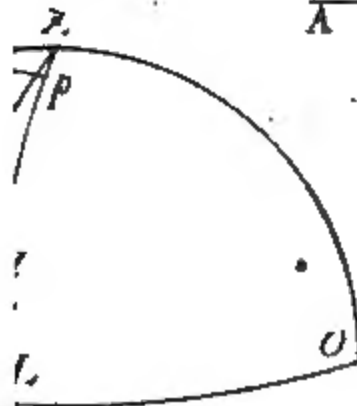
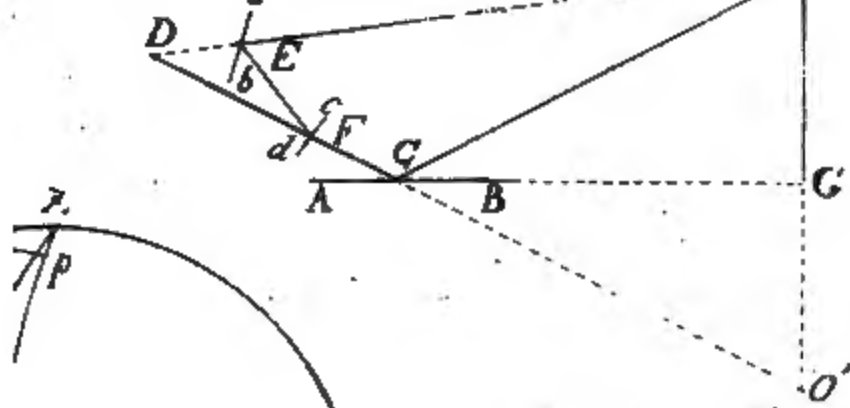


Fig. 62.

